Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Matemática
Ingeniería Civil Matemática

Certamen 1 - Análisis I (MAT225 - MAT401)

Profesores: Isabel Flores y Pedro Gajardo
Ayudantes: Franco Cerda y Cristian Vega
Fecha: 14 de abril 2018

Pregunta 1

Considere un espacio métrico (X, d) y dos funciones continuas $f,\ g : X \longrightarrow \mathbb{R}$.

1. Pruebe que para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ se tiene que la función $h : X \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$h(x) = f(x) + \lambda g(x) \qquad x \in X,$$

   es continua.

2. Para $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ considere los siguientes subconjuntos de X:

$$A := \{x \in X \ : \ f(x) - g(x) \geq \alpha\} \qquad \text{y} \qquad B := \{x \in X \ : \ f(x) + g(x) < \beta\}.$$

   Demuestre que A es cerrado y B es abierto.

3. Para los mismos conjuntos A y B definidos en el punto anterior, pruebe que

$$\{x \in X \ : \ f(x) - g(x) > \alpha\} \subset \operatorname{int}(A) \qquad \text{y} \qquad \overline{B} \subset \{x \in X \ : \ f(x) + g(x) \leq \beta\}.$$

Pregunta 2

Sea (X, d) un espacio métrico compacto y $f_k : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una sucesión de funciones continuas que converge puntualmente a una función continua $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Adicionalmente, la sucesión $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset C(X, \mathbb{R})$ satisface la siguiente propiedad:

$$f_{k+1}(x) \leq f_k(x) \qquad \forall\ x \in X,\ \forall\ k \in \mathbb{N}.$$

Para $\varepsilon > 0$ y $k \in \mathbb{N}$ considere el siguiente conjunto:

$$C_k^\varepsilon := \{x \in X \ : \ |f(x) - f_k(x)| \geq \varepsilon\}.$$

1. Pruebe que para todo $\varepsilon > 0$ y $k \in \mathbb{N}$, te tiene

$$C_k^\varepsilon = \{x \in X \ : \ f_k(x) - f(x) \geq \varepsilon\}.$$

   Demuestre además que C_k^ε es un conjunto cerrado de X y $C_{k+1}^\varepsilon \subset C_k^\varepsilon$.

2. Demuestre que para todo $\varepsilon > 0$ se obtiene $\bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} C_k^\varepsilon = \emptyset$ y luego concluya que existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $C_k^\varepsilon = \emptyset$ para todo $k \geq k_0$.

3. Demuestre que f_k converge uniformemente a f.

Pregunta 3

En un espacio métrico (X, d) considere un conjunto no vacío $C \subset X$ y la función $d_C : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$d_C(x) := \inf_{y \in C} d(x, y),$$

denominada función distancia al conjunto C.

1. Justifique que la función d_C está bien definida y pruebe que es continua en todo punto de X.

2. Para dos conjuntos no vacíos $A,\ B \subset X$ se define

$$\operatorname{dist}(A, B) := \inf\{d(a, b)\ :\ a \in A,\ b \in B\} = \inf_{b \in B} d_A(b) = \inf_{a \in A} d_B(a),$$

   donde $d_A(\cdot)$ y $d_B(\cdot)$ son las funciones distancia a los conjuntos A y B respectivamente. Si A es compacto y B es cerrado, demuestre que $A \cap B = \emptyset$ si y sólo si $\operatorname{dist}(A, B) > 0$.

3. Sean $K,\ U \subset X$ con K compacto no vacío y U abierto tal que $K \subset U$. Demuestre que existe un conjunto abierto $V \subset X$, tal que

$$K \subset V \subset \overline{V} \subset U.$$

Tiempo: 180 minutos.