Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Matemática
Ingeniería Civil Matemática

Certamen 1 (Pauta) - Análisis I (MAT225 - MAT401)

Profesores: Isabel Flores y Pedro Gajardo
Ayudantes: Franco Cerda y Cristian Vega
Fecha: 14 de abril 2018

Pregunta 1

Considere un espacio métrico (X, d) y dos funciones continuas $f,\ g : X \longrightarrow \mathbb{R}$.

1. Pruebe que para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ se tiene que la función $h : X \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$h(x) = f(x) + \lambda g(x) \qquad x \in X,$$

es continua.

Solución: Si $\lambda = 0$ el resultado es directo, pues la función $h = f + \lambda g = f$ es continua de acuerdo al enunciado. Supongamos entonces $\lambda \neq 0$.

Sea $x \in X$ y $\varepsilon > 0$. Como f y g son continuas en x, se tendrá que existe $\delta_1, \delta_2 > 0$ tales que

$$d(x,y) < \delta_1 \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$d(x,y) < \delta_2 \quad \Rightarrow \quad |g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{2|\lambda|}.$$

Por lo tanto, definiendo $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$ se tendrá

$$d(x,y) < \delta \Rightarrow |f(x) + \lambda g(x) - f(y) - \lambda g(y)| \leq |f(x) - f(y)| + |\lambda||g(x) - g(y)| < \varepsilon,$$

concluyendo así que $f + \lambda g$ es continua en x.

2. Para $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ considere los siguientes subconjuntos de X:

$$A := \{x \in X \ : \ f(x) - g(x) \geq \alpha\} \qquad \text{y} \qquad B := \{x \in X \ : \ f(x) + g(x) < \beta\}.$$

Demuestre que A es cerrado y B es abierto.

Solución: Para $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ se observa que los conjuntos A y B se pueden escribir de la siguiente forma:

$$A = (f-g)^{-1}([\alpha, +\infty[), \qquad B = (f+g)^{-1}(]-\infty, \beta[). \tag{1}$$

Por otro lado, por la pregunta anterior, se tiene que las funciones $f - g$ y $f + g$ son continuas. Por lo tanto, como $[\alpha, +\infty[$ es un conjunto cerrado de $\mathbb{R}$ y $]-\infty, \beta[$ es abierto, deducimos que A es cerrado y B es abierto en X, en virtud de las expresiones indicadas en (1) (preimágenes de un conjunto cerrado y de un conjunto abierto a través de funciones continuas).

3. Para los mismos conjuntos A y B definidos en el punto anterior, pruebe que

$$\{x \in X \ : \ f(x) - g(x) > \alpha\} \subset \operatorname{int}(A) \qquad \text{y} \qquad \overline{B} \subset \{x \in X \ : \ f(x) + g(x) \leq \beta\}.$$

Solución: Como $A^* := \{x \in X \ : \ f(x) - g(x) > \alpha\} = (f-g)^{-1}(]\alpha, +\infty[)$, $f - g$ es una función continua y $]\alpha, +\infty[$ es un conjunto abierto en $\mathbb{R}$, se tiene que A^* es abierto que además está contenido en A. Por lo tanto $A^* \subset \mathrm{int}(A)$ pues $\mathrm{int}(A)$ es el conjunto abierto más grande contenido en A.

Similarmente, observamos que $B^* := \{x \in X \ : \ f(x) + g(x) \leq \beta\} = (f+g)^{-1}(]-\infty, \beta])$ es un conjunto cerrado, por ser $f+g$ una función continua y $]-\infty,\beta]$ un conjunto cerrado en $\mathbb{R}$. Como $B \subset B^*$ se deduce $\overline{B} \subset B^*$.

Pregunta 2

Sea (X,d) un espacio métrico compacto y $f_k : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una sucesión de funciones continuas que converge puntualmente a una función continua $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Adicionalmente, la sucesión $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset C(X,\mathbb{R})$ satisface la siguiente propiedad:

$$f_{k+1}(x) \leq f_k(x) \qquad \forall\ x \in X,\ \forall\ k \in \mathbb{N}.$$

Para $\varepsilon > 0$ y $k \in \mathbb{N}$ considere el siguiente conjunto:

$$C_k^\varepsilon := \{x \in X \ : \ |f(x) - f_k(x)| \geq \varepsilon\}.$$

1. Pruebe que para todo $\varepsilon > 0$ y $k \in \mathbb{N}$, te tiene

$$C_k^\varepsilon = \{x \in X \ : \ f_k(x) - f(x) \geq \varepsilon\}.$$

Demuestre además que C_k^ε es un conjunto cerrado de X y $C_{k+1}^\varepsilon \subset C_k^\varepsilon$.

Solución: Sea $\varepsilon > 0$ y $k \in \mathbb{N}$. Veamos que

$$|f(x) - f_k(x)| = f_k(x) - f(x) \qquad \forall\ x \in X. \tag{2}$$

Alternativa 1: Si esto no se tiene, entonces existirá $x \in X$ tal que $f_k(x) < f(x)$. Definiendo

$$\delta := f(x) - f_k(x) > 0$$

se tendrá entonces que

$$f(x) - f_{k'}(x) \geq \delta \qquad \forall\ k' \geq k,$$

contradiciendo

$$f(x) = \lim_{k' \to +\infty} f_{k'}(x).$$

Por lo tanto, se tiene (2).

Alternativa 2: Dado $x \in X$ tenemos que $f_{k+1}(x) \leq f_k(x)$ $\forall k \in \mathbb{N}$, luego

$$f_{k+n}(x) \leq f_k(x) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como $f_m(x) \to f(x)$ si $m \to \infty$, entonces fijo k y tomando límite cuando $n \to \infty$, se tiene que

$$f(x) \leq f_k(x).$$

Por lo tanto, se tiene (2).

Ahora, de (2) se tiene que:

$$C_k^\varepsilon = \{x \in X \ : \ f_k(x) - f(x) \geq \varepsilon\} = (f_k - f)^{-1}([\varepsilon, +\infty[).$$

Adicionalmente, como $f_k - f$ es una función continua (por la Pregunta 1) y $[\varepsilon, +\infty[$ es un conjunto cerrado en $\mathbb{R}$, deducimos que C_k^ε es un conjunto cerrado de X.

Finalmente, como $f_{k+1}(x) \leq f_k(x)$ para doto $k \in \mathbb{N}$ y todo $x \in X$, se tendrá

$$x \in C_{k+1}^\varepsilon \Leftrightarrow f_{k+1}(x) - f(x) \geq \varepsilon \Rightarrow f_k(x) - f(x) \geq \varepsilon \Leftrightarrow x \in C_k^\varepsilon,$$

probando así $C_{k+1}^\varepsilon \subset C_k^\varepsilon$.

2. Demuestre que para todo $\varepsilon > 0$ se obtiene $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} C_k^\varepsilon = \emptyset$ y luego concluya que existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $C_k^\varepsilon = \emptyset$ para todo $k \geq k_0$.

   Solución: Supongamos existe $\varepsilon > 0$ tal que $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} C_k^\varepsilon \neq \emptyset$. Sea $x \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} C_k^\varepsilon$, entonces

$$|f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon \qquad \forall\ k \in \mathbb{N},$$

   lo que contradice la igualdad
$$f(x) = \lim_{k\to+\infty} f_k(x)$$
   que se tiene de la convergencia puntual. Por lo tanto, $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} C_k^\varepsilon = \emptyset$.

   Como X es compacto, existirán $k_1, k_2, \ldots, k_n \in \mathbb{N}$ tales que

$$\bigcap_{j=1}^{n} C_{k_j}^\varepsilon = \emptyset.$$

   Pero como $C_{k+1}^\varepsilon \subset C_k^\varepsilon$, se deduce entonces

$$\emptyset = \bigcap_{j=1}^{n} C_{k_j}^\varepsilon = C_{k_0}^\varepsilon,$$

   donde $k_0 = \max\{k_1, k_2, \ldots, k_n\}$, teniendo además $C_k^\varepsilon = \emptyset$ para todo $k \geq k_0$.

3. Demuestre que f_k converge uniformemente a f.

   Solución: Sea $\varepsilon > 0$. Por la parte anterior, sabemos que existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $C_k^\varepsilon = \emptyset$ para todo $k \geq k_0$. Por lo tanto,
$$(C_k^\varepsilon)^c = X \qquad \forall\ k \geq k_0.$$
   Esto quiere decir que
$$\sup_{x\in X} |f_k(x) - f(x)| \leq \varepsilon \qquad \forall\ \ k \geq k_0,$$
   concluyendo en consecuencia que $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a la función f.

Pregunta 3

En un espacio métrico (X, d) considere un conjunto no vacío $C \subset X$ y la función $d_C : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$d_C(x) := \inf_{y \in C} d(x, y),$$

denominada función distancia al conjunto C.

1. Justifique que la función d_C está bien definida y pruebe que es continua en todo punto de X.

   Solución: Como $d(x, y) \geq 0$ para todo $x, y \in X$, se tendrá

   $$0 \leq \inf_{y \in C} d(x, y) = d_C(x).$$

   Por otro lado, como $C \neq \emptyset$, para $x_0 \in C$ se tendrá

   $$d_C(x) \leq d(x, x_0) < +\infty.$$

   Por lo tanto $d_C(x) \in [0, +\infty[$ para todo $x \in X$, mostrando así que la función $d_C(\cdot)$ está bien definida.

   Sean ahora $x, y \in X$. Entonces,

   $$d_C(x) \leq d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \qquad \forall\ z \in C.$$

   De aquí se concluye

   $$d_C(x) \leq d(x, y) + d_C(y).$$

   Intercambiando los roles de x e y, deducimos

   $$|d_C(x) - d_C(y)| \leq d(x, y) \qquad \forall\ x, y \in X,$$

   por lo tanto $d_C(\cdot)$ es Lipschitz y, en consecuencia, es una función continua.

2. Para dos conjuntos no vacíos $A,\ B \subset X$ se define

   $$\operatorname{dist}(A, B) := \inf\{d(a, b)\ :\ a \in A,\ b \in B\} = \inf_{b \in B} d_A(b) = \inf_{a \in A} d_B(a),$$

   donde $d_A(\cdot)$ y $d_B(\cdot)$ son las funciones distancia a los conjuntos A y B respectivamente. Si A es compacto y B es cerrado, demuestre que $A \cap B = \emptyset$ si y sólo si $\operatorname{dist}(A, B) > 0$.

   Solución:

   Si $A \cap B \neq \emptyset$, mostremos que $\operatorname{dist}(A, B) = 0$.

   Alternativa 1: Sea $\bar{x} \in A \cap B$. Entonces $d_A(\bar{x}) = 0$, pues A es un conjunto cerrado y, por lo tanto,

   $$0 \leq \operatorname{dist}(A, B) = \inf_{b \in B} d_A(b) \leq d_A(\bar{x}) = 0.$$

   Alternativa 2: Sea $\bar{x} \in A \cap B$. Entonces

   $$\inf\{d(a, b)\ :\ a \in A,\ b \in B\} \leq d(\bar{x}, \bar{x}),$$

   luego $0 \leq \operatorname{dist}(A, B) \leq 0$, por lo tanto $\operatorname{dist}(A, B) = 0$.

   Supongamos ahora $\operatorname{dist}(A, B) = 0$ y mostremos $A \cap B \neq \emptyset$.

Alternativa 1: Para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $a_k \in A$ y $b_k \in B$ tales que

$$0 \leq d(a_k, b_k) \leq \operatorname{dist}(A, B) + \frac{1}{k} = \frac{1}{k}.$$

Como A es un conjunto compacto, existe $\bar{a} \in A$ y una subsucesión $\{a_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ tal que $a_{k_j} \to \bar{a}$. Se tendrá además que $b_{k_j} \to \bar{a}$ pues

$$d(b_{k_j}, \bar{a}) \leq d(b_{k_j}, a_{k_j}) + d(a_{k_j}, \bar{a}) \leq \frac{1}{k_j} + d(a_{k_j}, \bar{a}) \to 0.$$

Como A y B son conjuntos cerrados, y recordando $a_{k_j} \in A$ y $b_{k_j} \in B$, se tendrá entonces

$$\lim_{j\to+\infty} a_{k_j} = \bar{a} \in A$$

y

$$\lim_{j\to+\infty} b_{k_j} = \bar{a} \in B$$

concluyendo $\bar{a} \in A \cap B$ y, por lo tanto, $A \cap B \neq \emptyset$.

Alternativa 2: Sabemos que $d_B : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es función continua y como A es compacto, entonces d_B alcanza un mínimo en A. Sea $a_0 \in A$ tal que

$$d_B(a_0) = \inf_{a\in A} d_B(a).$$

Tenemos que B es cerrado y $d_B(a_0) = 0$, por lo tanto $a_0 \in B$, luego $A \cap B \neq \emptyset$.

3. Sean K, $U \subset X$ con K compacto no vacío y U abierto tal que $K \subset U$. Demuestre que existe un conjunto abierto $V \subset X$, tal que

$$K \subset V \subset \overline{V} \subset U.$$

Solución: Alternativa 1: Como U es un conjunto abierto, se tiene que para todo $x \in U$, existe $\varepsilon_x > 0$ tal que

$$B(x, \varepsilon_x) \subset B[x, \varepsilon_x] \subset U.$$

Por lo tanto

$$\bigcup_{x\in X} B(x, \varepsilon_x) = \bigcup_{x\in X} B[x, \varepsilon_x] = U.$$

Como $K \subset U$ y K es compacto, existirán $x_1, \ldots, x_n \in U$ tales que

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{n} B(x_j, \varepsilon_{x_j}) \subset \bigcup_{j=1}^{n} B[x_j, \varepsilon_{x_j}] \subset U.$$

Si definimos

$$V := \bigcup_{j=1}^{n} B(x_j, \varepsilon_{x_j})$$

se tiene que V es abierto (unión de conjuntos abiertos) y

$$\overline{V} \subset \bigcup_{j=1}^{n} B[x_j, \varepsilon_{x_j}]$$

puesto que el conjunto del lado derecho es un cerrado (unión finita de cerrados) que contiene a V. Por lo tanto,

$$K \subset V \subset \overline{V} \subset U.$$

Alternativa 2: Se tiene que K compacto, U abierto y $K \subset U$, por lo tanto U^c es cerrado y $K \cap U^c = \emptyset$. Por resultado de la parte anterior, tenemos que $\text{dist}(K, U^c) > 0$. Definamos $r := \frac{1}{2}\text{dist}(K, U^c)$. Como K es compacto, existen $x_1, \cdots, x_n \in K$ tal que

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{n} B(x_j, r).$$

Definamos $V := \bigcup_{j=1}^{n} B(x_j, r)$.

Por otro lado, $\bigcup_{j=1}^{n} B[x_j, r]$ es cerrado, puesto que es unión finita de conjuntos cerrados, por lo tanto

$$\overline{V} \subset \bigcup_{j=1}^{n} B[x_j, r].$$

Demostremos ahora que $\bigcup_{j=1}^{n} B[x_j, r] \subset U$.

Sea $x \in \bigcup_{j=1}^{n} B[x_j, r]$, luego $x \in B[x_{j_0}, r]$ para algún $j_0 \in \{1, \cdots, n\}$. Para $y \in U^c$ se tiene que

$$d(x, y) \geq d(x_{j_0}, y) - d(x, x_{j_0}) \geq d(x_{j_0}, U^c) - r = r > 0,$$

por lo tanto $\text{dist}(x, U^c) > 0$. Como U^c es cerrado, tenemos que $x \in U$.

Hemos demostrado que

$$K \subset V \subset \overline{V} \subset \bigcup_{j=1}^{n} B[x_j, r] \subset U,$$

concluyendo que existe V conjunto abierto tal que

$$K \subset V \subset \overline{V} \subset U.$$

Tiempo: 180 minutos.