Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Matemática
Ingeniería Civil Matemática

Certamen 1 - Análisis I (MAT225)

Profesor: Pedro Gajardo
Ayudante: Simón Masnú
Fecha: 13 de abril 2019

Pregunta 1

Considere un espacio métrico (X, d).

1. Pruebe que un conjunto $D \subseteq X$ es denso si y solamente si, para todo $r > 0$ se tiene que
$$X \subseteq \bigcup_{y \in D} B(y, r).$$
2. Demuestre que si (X, d) es compacto, entonces es separable, es decir, existe un conjunto denso $D \subseteq X$ de cardinalidad numerable.

Pregunta 2

Sea (X, d) un espacio métrico. Para un conjunto $A \subseteq X$ se define la función distancia $d_A : X \longrightarrow \mathbb{R}$ por
$$d_A(x) := \inf_{y \in A} d(x, y).$$

1. Dado un conjunto $A \subseteq X$ y $r > 0$, considere $B(A, r) := \{x \in X \mid d_A(x) < r\}$.
   a) Pruebe que
   $$B(A, r) = \bigcup_{y \in A} B(y, r).$$
   b) Demuestre que si A es cerrado, entonces $A = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} B(A, 1/k)$, y concluya que todo conjunto cerrado es una intersección numerable de conjuntos abiertos.
2. Para dos conjuntos $A,\ B \subseteq X$ se define $\operatorname{dist}(A, B) := \inf\{d(x, y) \mid x \in A;\ y \in B\}$. Si B es compacto, pruebe que $\operatorname{dist}(A, B) = 0$ si y solo si $\overline{A} \cap B \neq \emptyset$.

Pregunta 3

Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) dos espacios métricos y $f : X \longrightarrow Y$ una función.

1. Si (Y, d_Y) es completo y $f : X \longrightarrow Y$ es uniformemente continua, biyectiva y su inversa es continua, pruebe que (X, d_X) es también completo.
2. Si para todo conjunto $A \subseteq X$ se tiene que $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$, demuestre que f es continua.

Tiempo: 180 minutos.