



Pauta Certamen 1 - Análisis I (MAT225)

Profesor: Pedro Gajardo

Ayudante: Simón Masnú

Fecha: 13 de abril 2019

Pregunta 1

Considere un espacio métrico (X, d) .

1. Pruebe que un conjunto $D \subseteq X$ es denso si y solamente si, para todo $r > 0$ se tiene que

$$X \subseteq \bigcup_{y \in D} B(y, r). \quad (1)$$

Respuesta: Supongamos que $D \subseteq X$ es denso. Entonces, para todo $r > 0$ y $x \in X$ se tendrá $B(x, r) \cap D \neq \emptyset$. Tomando $y \in B(x, r) \cap D$ se tiene $x \in B(y, r)$, probando así la inclusión (1).

Supongamos ahora que para todo $r > 0$ se tiene la inclusión (1) y consideremos un abierto $\theta \neq \emptyset$. Para $x \in \theta$ se tendrá que existe $r^* > 0$ tal que $B(x, r^*) \subseteq \theta$. Por otro lado, como se tiene (1) para $r = r^*$, existirá $y \in D$ tal que $x \in B(y, r^*)$. Esto implica que $y \in B(x, r^*) \subseteq \theta$. Por lo tanto $\theta \cap D \neq \emptyset$, probando así que D es denso.

2. Demuestre que si (X, d) es compacto, entonces es separable, es decir, existe un conjunto denso $D \subseteq X$ de cardinalidad numerable.

Respuesta: Por la compacidad de X sabemos que para cada $k \in \mathbb{N}$ existe un conjunto de cardinalidad finita $A_k \subseteq X$ tal que

$$X \subseteq \bigcup_{y \in A_k} B(y, 1/k).$$

Probemos que $D = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$, que es de cardinalidad numerable, es denso. Tomemos un abierto $\theta \neq \emptyset$. Para $x \in \theta$ se tendrá que existe $r^* > 0$ tal que $B(x, r^*) \subseteq \theta$. Consideremos $k^* \in \mathbb{N}$ tal que $k^* > 1/r^*$. Por otro lado, existirá $y \in A_{k^*}$ tal que $x \in B(y, 1/k^*)$, por lo tanto, $y \in B(x, 1/k^*) \subseteq B(x, r^*) \subseteq \theta$, probando así que $\theta \cap D \neq \emptyset$, lo que nos permite concluir que D es denso.

Pregunta 2

Sea (X, d) un espacio métrico. Para un conjunto $A \subseteq X$ se define la función distancia $d_A : X \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$d_A(x) := \inf_{y \in A} d(x, y).$$

1. Dado un conjunto $A \subseteq X$ y $r > 0$, considere $B(A, r) := \{x \in X \mid d_A(x) < r\}$.

a) Pruebe que

$$B(A, r) = \bigcup_{y \in A} B(y, r).$$

Respuesta: Primero observemos que la función $d_A : X \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, de hecho es Lipschitz, puesto que para todo $x, z \in X$ se tendrá

$$d_A(x) \leq d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad \forall y \in A,$$

y, por lo tanto, $|d_A(x) - d_A(z)| \leq d(x, z)$. En consecuencia, los conjuntos $B(A, r) = d_A^{-1}((-\infty, r))$ son abiertos. Sea ahora $x \in B(A, r)$. Se tiene entonces que $d_A(x) < r$, por lo que existirá $y \in A$ tal que $d(x, y) < r$, lo que nos permite concluir que $x \in \bigcup_{y \in A} B(y, r)$.

Por otro lado, si $x \in \bigcup_{y \in A} B(y, r)$, existirá $y \in A$ tal que $d_A(x) \leq d(x, y) < r$, concluyendo que $x \in B(A, r)$.

b) Demuestre que si A es cerrado, entonces $A = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} B(A, 1/k)$, y concluya que todo conjunto cerrado es una intersección numerable de conjuntos abiertos.

Respuesta: Observar que para todo conjunto A y $r > 0$, se tiene que $A \subseteq B(A, r)$, por lo tanto

$$A \subseteq \bigcap_{k \in \mathbb{N}} B(A, 1/k).$$

Si $x \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} B(A, 1/k)$, entonces $d_A(x) < 1/k$ para todo $k \in \mathbb{N}$, por lo tanto $d_A(x) = 0$.

Esto implica que $x \in \overline{A}$, pero si A es cerrado, entonces $x \in A$, probando así la igualdad deseada.

2. Para dos conjuntos $A, B \subseteq X$ se define $\text{dist}(A, B) := \inf\{d(x, y) \mid x \in A; y \in B\}$. Si B es compacto, pruebe que $\text{dist}(A, B) = 0$ si y solo si $\overline{A} \cap B \neq \emptyset$.

Respuesta: Si $\text{dist}(A, B) = 0$, entonces para todo $k \in \mathbb{N}$ existirá $x_k \in A$ e $y_k \in B$ tales que $d(x_k, y_k) < 1/k$. Como B es compacto, existirá una subsucesión $\{y_{k_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ y un elemento $\bar{y} \in B$ tales que $y_{k_j} \rightarrow \bar{y}$. Como $d(x_k, y_k) < 1/k$ deducimos que $x_{k_j} \rightarrow \bar{y}$ y, por lo tanto, $\bar{y} \in \overline{A} \cap B$.

Supongamos ahora $\overline{A} \cap B \neq \emptyset$ y tomemos $x \in \overline{A} \cap B \neq \emptyset$. Para todo $\varepsilon > 0$ se tendrá $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. Es decir, para todo $\varepsilon > 0$ existirá $y \in A$ tal que $\text{dist}(A, B) \leq d(x, y) < \varepsilon$, concluyendo así que $\text{dist}(A, B) = 0$.

Pregunta 3

Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) dos espacios métricos y $f : X \rightarrow Y$ una función.

1. Si (Y, d_Y) es completo y $f : X \rightarrow Y$ es uniformemente continua, biyectiva y su inversa es continua, pruebe que (X, d_X) es también completo.

Respuesta: Sea $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset X$ una sucesión de Cauchy y $\varepsilon > 0$. Por la uniforme continuidad de f , sabemos que existe $\delta > 0$ tal que

$$d_X(x, y) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Por otro lado, existirá $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d_X(x_k, x_{k'}) < \delta$ para todo $k, k' \geq k_0$. Por lo tanto, $d_Y(f(x_k), f(x_{k'})) < \varepsilon$ para todo $k, k' \geq k_0$, probando así que $\{f(x_k)\}_{k \in \mathbb{N}} \subset Y$ es una sucesión de Cauchy. Como Y es completo, existirá $z \in Y$ tal que $f(x_k) \rightarrow z$. Como $x_k = f^{-1}(f(x_k))$ y f^{-1} es continua, se tiene que $x_k \rightarrow f^{-1}(z)$, por lo tanto la sucesión $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ es convergente, permitiendo concluir la completitud de X .

2. Si para todo conjunto $A \subseteq X$ se tiene que $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$, demuestre que f es continua.

Respuesta: Supongamos existe $x \in X$ donde f no es continua. Es decir, existirá $\varepsilon > 0$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$ existe $x_k \in B(x, 1/k)$ que satisface $d_Y(f(x), f(x_k)) \geq \varepsilon$. Deducimos que $x_k \rightarrow x$. Definamos el conjunto $A = \{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$. Como $x \in \overline{A}$ se tiene que $f(x) \in f(\overline{A})$ y, por la hipótesis, entonces $f(x) \in \overline{f(A)}$. Esto implicará que $B(f(x), \varepsilon) \cap f(A) \neq \emptyset$. Como $f(A) = \{f(x_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ existirá $k \in \mathbb{N}$ tal que $f(x_k) \in B(f(x), \varepsilon)$, pero esto contradice la desigualdad $d_Y(f(x), f(x_k)) \geq \varepsilon$, por lo tanto la función f debe ser continua.

Tiempo: 180 minutos.