Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Matemática
Ingeniería Civil Matemática

Pauta Certamen 2 - Análisis I (MAT225)

Profesor: Pedro Gajardo
Ayudante: Simón Masnú
Fecha: 17 de agosto 2019

Pregunta 1

1. Sea $X = \mathbb{R}^n$ dotado de la norma Euclidiana. Para $m \in \mathbb{N}$ con $m < n$, calcule la función $P_C(x)$, proyección de $x \in \mathbb{R}^n$ sobre el conjunto C, el cual está definido por:

$$C = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = \cdots = x_m = 0 \text{ y } x_{m+1}, \ldots, x_n \geq 0\}.$$

Respuesta: De manera directa se tiene que C es un conjunto convexo no vacío, pues $(0, \ldots, 0) \in C$ y para $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ en C y $\alpha \in [0, 1]$, se tiene que $\alpha x_j + (1-\alpha)y_j = 0$ para $1 \leq j \leq m$ y $\alpha x_j + (1-\alpha)y_j \geq 0$ para $m+1 \leq j \leq n$. La cerradura de C se obtiene del hecho que C es un producto de conjuntos cerrados en $\mathbb{R}$, pues

$$C = \{0\} \times \{0\} \times \cdots \times \{0\} \times \mathbb{R}_+ \times \cdots \times \mathbb{R}_+.$$

Entonces, dado que C es un convexo cerrado no vacío, la función $P_C(\cdot)$ está bien definida.

Para $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, probemos que $P_C(x) = (y_j)_{j=1,\ldots,n}$, dado por

$$y_j = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leq j \leq m \\ \max\{0, x_j\} & \text{si } m+1 \leq j \leq n, \end{cases} \tag{P1}$$

es la proyección de x sobre C. Primero observe que $P_C(x) \in C$. Luego, utilizaremos la caracterización de la proyección (sobre un convexo cerrado) dada por

$$\langle x - P_C(x), z - P_C(x) \rangle \leq 0 \qquad \forall\, z = (z_1, \ldots, z_n) \in C.$$

El producto escalar se escribe como

$$\sum_{j=1}^{n}(x_j - y_j)(z_j - y_j) = \sum_{j=1}^{m}(x_j - y_j)(z_j - y_j) + \sum_{j=m+1}^{n}(x_j - y_j)(z_j - y_j) = \sum_{j=m+1}^{n}(x_j - y_j)(z_j - y_j),$$

donde y_j está dado por (P1). En la anterior expresión, se ha eliminado la sumatoria de $j = 1$ hasta $j = m$ dado que para esos índices se tiene $z_j = y_j = 0$. Para los $j = m+1, \ldots, n$ se tiene que $(x_j - y_j)(z_j - y_j) = (x_j - \max\{0, x_j\})(z_j - \max\{0, x_j\})$. Por lo tanto, si $x_j \geq 0$ obtenemos

$$(x_j - \max\{0, x_j\})(z_j - \max\{0, x_j\}) = 0,$$

y si $x_j < 0$ se obtiene

$$(x_j - \max\{0, x_j\})(z_j - \max\{0, x_j\}) = x_j z_j \leq 0.$$

En consecuencia

$$\langle x - P_C(x), z - P_C(x)\rangle = \sum_{j=m+1}^{n} (x_j - y_j)(z_j - y_j) = \sum_{j=m+1}^{n} (x_j - y_j)(z_j - y_j) \leq 0,$$

para todo $z \in C$, concluyendo que efectivamente $P_C(x)$ dado por (P1) es la proyección de x sobre el conjunto C.

2. Sean $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ dos espacios vectoriales normados y $T : X \longrightarrow Y$ una función lineal continua. Si X es Banach y existe $c > 0$ tal que

$$\|T(x)\|_Y \geq c\|x\|_X \qquad \forall\, x \in X, \tag{P2}$$

demuestre que la imagen o rango de T es un subespacio vectorial cerrado de Y.

Respuesta: Dado que T es una función lineal, inmediatamente se tiene que $\mathrm{Im}(T) = \{T(x) \mid x \in X\} \subseteq Y$ es un subespacio vectorial. Probemos que es cerrado. Para ello, consideremos una sucesión $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{Im}(T)$ tal que $y_k \to y$ para algún $y \in Y$. Debemos probar que $y \in \mathrm{Im}(T)$.

Para cada $k \in \mathbb{N}$, se tiene que existe $x_k \in X$ tal que $y_k = T(x_k)$. Como $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es convergente, será una sucesión de Cauchy, por lo tanto, para $\varepsilon > 0$ existirá $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|y_k - y_{k'}\|_Y = \|T(x_k) - T(x_{k'})\|_Y \leq \varepsilon/c \qquad k, k' \geq k_0.$$

Por (P2), se tendrá

$$\|x_k - x_{k'}\|_X \leq \varepsilon \qquad k, k' \geq k_0,$$

y, por lo tanto, $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset X$ es una sucesión de Cauchy en X. Como X es Banach, existe $x \in X$ tal que $x_k \to x$. Por la continuidad de T, concluimos que $y_k = T(x_k) \to T(x) = y$, demostrando así que $y \in \mathrm{Im}(T)$, es decir, $\mathrm{Im}(T)$ es cerrado.

Pregunta 2

Sean $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle_X)$ e $(Y, \langle\cdot,\cdot\rangle_Y)$ dos espacios de Hilbert y $A : X \longrightarrow Y$ una función lineal continua, es decir, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$.

1. Para $y \in Y$ se define el operador $\ell : X \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$\ell(x) = \langle Ax, y\rangle_Y \qquad \forall\, x \in X.$$

Pruebe que $\ell \in \mathcal{L}(X, \mathbb{R}) = X^*$ y que existe un único $w_y \in X$ tal que

$$\ell(x) = \langle Ax, y\rangle_Y = \langle w_y, x\rangle_X \qquad \forall\, x \in X. \tag{1}$$

Respuesta: Para $y \in Y$ (fijo), comencemos por probar que $\ell : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es lineal. Dados $x,\ x' \in X$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, se tendrá

$$\ell(x + \lambda x') = \langle A(x + \lambda x'), y\rangle_Y = \langle Ax, y\rangle_Y + \lambda\langle Ax', y\rangle_Y = \ell(x) + \lambda\ell(x'),$$

probando así que ℓ es una función lineal. Demostremos es una función lineal continua. Para ello, observamos que

$$|\ell(x)| = |\langle Ax, y\rangle_Y| \leq \|Ax\|_Y\ \|y\|_Y \leq (\|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)}\ \|y\|_Y)\ \|x\|_X \qquad \forall\, x \in X.$$

Por lo tanto, existe $M = \|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \ \|y\|_Y \geq 0$ tal que

$$|\ell(x)| \leq M \ \|x\|_X \qquad \forall \ x \in X,$$

probando así que $\ell \in X^*$. Finalmente, por el Teorema de representación de Riesz, se tendrá que existe un único $w_y \in X$ tal que

$$\ell(x) = \langle w_y, x\rangle_X \qquad \forall \ x \in X.$$

2. Considere la función $A^* : Y \longrightarrow X$ definida por $A^*y = w_y$ donde, para $y \in Y$, el elemento $w_y \in X$ es el único que satisface (1), determinado en la parte anterior. Pruebe que $A^* \in \mathcal{L}(Y, X)$ y que

$$\|A^*\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \leq \|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)}.$$

Respuesta: Demostremos que $A^* : Y \longrightarrow X$ es lineal. Dados $y, \ y' \in Y$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, se tiene que $A^*(y + \lambda y') = w_{y+\lambda y'}$, donde (de la parte anterior) sabemos que $w_{y+\lambda y'} \in X$ es el único elemento que satisface

$$\langle w_{y+\lambda y'}, x\rangle_X = \langle Ax, y + \lambda y'\rangle_Y = \langle Ax, y\rangle_Y + \lambda\langle Ax, y'\rangle_Y \qquad \forall \ x \in X.$$

También de la parte anterior, sabemos que $A^*y = w_y$ y $A^*y' = w_{y'}$ son los únicos elementos que

$$\langle w_y, x\rangle_X = \langle Ax, y\rangle_Y \quad \text{ y } \quad \langle w_{y'}, x\rangle_X = \langle Ax, y'\rangle_Y \qquad \forall \ x \in X.$$

Por lo tanto,

$$\langle w_{y+\lambda y'}, x\rangle_X = \langle w_y, x\rangle_X + \lambda\langle w_{y'}, x\rangle_X \qquad \forall \ x \in X,$$

concluyendo así que $A^*(y + \lambda y') = w_{y+\lambda y'} = w_y + \lambda w_{y'} = A^*y + \lambda A^*y'$, lo que prueba la linealidad de A^*.

Para probar la continuidad de A^* se tendrá que

$$\|A^*y\|_X^2 = \langle A^*y, A^*y\rangle_X = \langle y, A(A^*y)\rangle_Y \leq \|y\|_Y \ \|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \ \|A^*y\|_X \qquad \forall \ y \in Y.$$

Por lo tanto

$$\|A^*y\|_X \leq \|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \ \|y\|_Y \qquad \forall \ y \in Y,$$

de donde se deduce la continuidad de A^* y la desigualdad

$$\|A^*\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \leq \|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)}.$$

3. Pruebe que existe un único $A^* \in \mathcal{L}(Y, X)$ que satisface

$$\langle Ax, y\rangle_Y = \langle A^*y, x\rangle_X \qquad \forall \ x \in X, \ \ \forall \ y \in Y,$$

y que

$$\|A^*\|_{\mathcal{L}(Y,X)} = \|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)}.$$

Respuesta: La existencia de $A^* \in \mathcal{L}(Y, X)$ ya está demostrada en el punto anterior. Probemos entonces la unicidad de A^*. Si existen A_1^* y A_2^* tales que

$$\langle Ax, y\rangle_Y = \langle A_1^*y, x\rangle_X = \langle A_2^*y, x\rangle_X \ \Rightarrow \ \langle (A_1^* - A_2^*)y, x\rangle_X = 0 \qquad \forall \ x \in X, \ \ \forall \ y \in Y,$$

para $y \in Y$ definimos $x = (A_1^* - A_2^*)y$, obteniéndose

$$\|(A_1^* - A_2^*)y\|_X^2 = \langle (A_1^* - A_2^*)y, (A_1^* - A_2^*)y \rangle_X = 0 \qquad \forall\ y \in Y.$$

Por lo tanto $A_1^* = A_2^*$.

Como $A^* : Y \longrightarrow X$ está en $\mathcal{L}(Y, X)$, siguiendo lo ya hecho hasta ahora, sabemos existe $A^{**} : X \longrightarrow Y$ que estará en $\mathcal{L}(X, Y)$ tal que

$$\langle A^* y, x \rangle_X = \langle A^{**} x, y \rangle_Y \qquad \forall\ x \in X, \quad \forall\ y \in Y$$

y

$$\|A^{**}\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq \|A^*\|_{\mathcal{L}(Y,X)}.$$

Dado que

$$\langle Ax, y \rangle_Y = \langle A^* y, x \rangle_X \qquad \forall\ x \in X, \quad \forall\ y \in Y,$$

deducimos que $A = A^{**}$ concluyendo

$$\|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \|A^*\|_{\mathcal{L}(Y,X)}.$$

Pregunta 3

Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado y $(X^*, \|\cdot\|_*)$ su espacio dual, dotado de la norma

$$\|\ell\|_* = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\ell(x)}{\|x\|} = \sup_{x \in B[0,1]} \ell(x) \qquad \forall\ \ell \in X^*,$$

donde $B[0,1]$ es la bola cerrada de centro 0 y radio unitario en X.

1. Pruebe que para todo $M > 0$ se tiene

$$\sup_{x \in B[0,M]} \ell(x) = M\|\ell\|_* \qquad \forall\ \ell \in X^*.$$

Respuesta: Para $M > 0$ se tiene que

$$\sup_{x \in B[0,M]} \ell(x) = \frac{M}{M} \sup_{x \in B[0,M]} \ell(x) = M \sup_{x \in B[0,M]} \ell(x/M) = M \sup_{Mz \in B[0,M]} \ell(z) =$$

$$= M \sup_{z \in B[0,1]} \ell(z) = M\|\ell\|_* \qquad \forall\ \ell \in X^*.$$

2. Demuestre la siguiente desigualdad

$$\|x\| \geq \sup_{\ell \in X^* \setminus \{0\}} \frac{\ell(x)}{\|\ell\|_*} \qquad \forall\ x \in X.$$

Respuesta: Para todo $\ell \in X^*$ se tiene que

$$\|\ell\|_* \|x\|_X \geq \ell(x) \qquad \forall\ x \in X.$$

Por lo tanto

$$\|x\| \geq \sup_{\ell \in X^* \setminus \{0\}} \frac{\ell(x)}{\|\ell\|_*} \qquad \forall\ x \in X.$$

3. Suponga que existe $x \in X$ tal que

$$\|x\| > \sup_{\ell \in X^* \setminus \{0\}} \frac{\ell(x)}{\|\ell\|_*} =: R_x. \tag{P3}$$

Para $\varepsilon > 0$ tal que

$$\|x\| > R_x + \varepsilon,$$

demuestre que existe $\ell^* \in X^* \setminus \{0\}$ tal que

$$\ell^*(x) > (R_x + \varepsilon)\|\ell^*\|_*.$$

Respuesta: Si para $x \in X$ se tiene (P3) y dado $\varepsilon > 0$ tal que $\|x\| > R_x + \varepsilon$, entonces x no está en el conjunto convexo cerrado $B[0, R_x + \varepsilon]$. Por el Teorema de Hahn-Banach, sabemos que existen $\ell^* \in X^* \setminus \{0\}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que

$$\ell^*(x) > \alpha \geq \ell^*(z) \qquad \forall\ z \in B[0, R_x + \varepsilon].$$

Es decir

$$\ell^*(x) > \alpha \geq \sup_{z \in B[0, R_x + \varepsilon]} \ell^*(z) = (R_x + \varepsilon)\|\ell^*\|_*,$$

donde la última igualdad se obtiene de la primera parte de este problema.

4. Concluya que para todo $x \in X$, se tiene la igualdad

$$\|x\| = \sup_{\ell \in X^* \setminus \{0\}} \frac{\ell(x)}{\|\ell\|_*}.$$

Respuesta: Por la segunda parte de este problema, sabemos que

$$\|x\| \geq \sup_{\ell \in X^* \setminus \{0\}} \frac{\ell(x)}{\|\ell\|_*} = R_x \qquad \forall\ x \in X.$$

Si la desigualdad fuese estricta para algún $x \in X$, por la parte anterior deducimos que para $\varepsilon > 0$ tal que $\|x\| > R_x + \varepsilon$, se tendrá que existe $\ell^* \in X^* \setminus \{0\}$ tal que

$$\ell^*(x) > (R_x + \varepsilon)\|\ell^*\|_* > R_x\|\ell^*\|_*,$$

es decir,

$$\frac{\ell^*(x)}{\|\ell^*\|_*} > R_x = \sup_{\ell \in X^* \setminus \{0\}} \frac{\ell(x)}{\|\ell\|_*},$$

lo que es una contradicción. Por lo tanto, para todo $x \in X$ se tiene la igualdad

$$\|x\| = \sup_{\ell \in X^* \setminus \{0\}} \frac{\ell(x)}{\|\ell\|_*}.$$

Tiempo: 180 minutos.