Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Matemática
Ingeniería Civil Matemática

Certamen 2 - Análisis I (MAT225 - MAT401)

Profesores: Isabel Flores y Pedro Gajardo
Ayudantes: Franco Cerda y Cristian Vega
Fecha: 28 de julio 2018

Pregunta 1

Sean $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ y $(Z, \|\cdot\|_Z)$ tres espacios vectoriales normados y $b : X \times Y \longrightarrow Z$ una función bilineal, es decir, para todo $x \in X$ e $y \in Y$ fijos, las funciones $b(\cdot, y) : X \longrightarrow Z$ y $b(x, \cdot) : Y \longrightarrow Z$ son lineales.

1. Demuestre que si b es continua en $(0,0) \in X \times Y$, entonces existe $L \geq 0$ tal que

$$\|b(x,y)\|_Z \leq L\|x\|_X \ \|y\|_Y \qquad \forall \ (x,y) \in X \times Y. \tag{1}$$

2. Pruebe que si existe $L \geq 0$ tal que (1) se tiene, entonces b es continua en todo elemento $(x,y) \in X \times Y$.

Pregunta 2

Considere un espacio de Hilbert $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ y una sucesión de conjuntos convexos cerrados $C_k \subseteq H$ tales que $C_{k+1} \subseteq C_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y

$$C := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C_k \neq \emptyset.$$

Dado $\bar{x} \in H$, para $k \in \mathbb{N}$ se define x_k como la proyección de $\bar{x}$ sobre el conjunto C_k, es decir, $x_k \in C_k$ y además

$$\|x_k - \bar{x}\| = d_{C_k}(\bar{x}) := \inf_{x \in C_k} \|x - \bar{x}\|.$$

1. Pruebe que $d_{C_k}(\bar{x}) \leq d_{C_{k+1}}(\bar{x}) \leq d_C(\bar{x})$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y, por lo tanto, existe $d^* \in \mathbb{R}$ con $d^* \leq d_C(\bar{x})$ tal que $d_{C_k}(\bar{x}) \to d^*$.

2. Demuestre que para todo $n \geq k$ se tendrá

$$\left\| \frac{x_k + x_n}{2} - \bar{x} \right\| \geq d_{C_k}(\bar{x})$$

   y, por lo tanto,

$$\frac{1}{2}\|x_n - x_k\|^2 = d^2_{C_n}(\bar{x}) + d^2_{C_k}(\bar{x}) - 2\left\| \frac{x_k + x_n}{2} - \bar{x} \right\|^2 \leq d^2_{C_n}(\bar{x}) - d^2_{C_k}(\bar{x}) \qquad \forall \ n \geq k.$$

3. Concluya que existe $x^* \in C$ tal que $x_k \to x^*$ y además, x^* corresponde a la proyección de $\bar{x}$ sobre C.

Pregunta 3

Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert. Para un conjunto $C \subseteq H$ se define su *polar* mediante

$$C^\circ := \{x^* \in H \mid \langle x, x^* \rangle \leq 1 \quad \text{para todo} \quad x \in C\}.$$

1. Demuestre que para todo $C \subseteq H$ se tiene que C° es un conjunto convexo cerrado de H y además $0 \in C^\circ$.
2. Pruebe que $C \subseteq (C^\circ)^\circ$.
3. Si $0 \in C$ y además C es convexo y cerrado, demuestre que si $x \notin C$, entonces existe $\bar{x} \in H \setminus \{0\}$ tal que
$$\langle x, \bar{x} \rangle > 1 \geq \langle y, \bar{x} \rangle \qquad \forall\, y \in C,$$
concluyendo que $\bar{x} \in C^\circ$.
4. Si $0 \in C$ y además C es convexo y cerrado, pruebe que $C = (C^\circ)^\circ$.

Tiempo: 180 minutos.