Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Matemática
Ingeniería Civil Matemática

Certamen 2 (pauta) - Análisis I (MAT225 - MAT401)

Profesores: Isabel Flores y Pedro Gajardo
Ayudantes: Franco Cerda y Cristian Vega
Fecha: 28 de julio 2018

Pregunta 1

Sean $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ y $(Z, \|\cdot\|_Z)$ tres espacios vectoriales normados y $b : X \times Y \longrightarrow Z$ una función bilineal, es decir, para todo $x \in X$ e $y \in Y$ fijos, las funciones $b(\cdot, y) : X \longrightarrow Z$ y $b(x, \cdot) : Y \longrightarrow Z$ son lineales.

1. Demuestre que si b es continua en $(0,0) \in X \times Y$, entonces existe $L \geq 0$ tal que
$$\|b(x,y)\|_Z \leq L\|x\|_X \ \|y\|_Y \qquad \forall\ (x,y) \in X \times Y. \tag{1}$$
Solución: Si b es continua en $(0,0)$, para $\varepsilon = 1$ existirá $\delta > 0$ tal que
$$\text{máx}\{\|x\|_X, \|y\|_Y\} \leq \delta \ \Rightarrow\ \|b(x,y)\|_Z \leq 1.$$
Sean $x \in X \setminus \{0\}$ e $y \in Y \setminus \{0\}$. Al definir $\tilde{x} = \delta x/\|x\|_X$ y $\tilde{y} = \delta y/\|y\|_Y$, se tendrá $\text{máx}\{\|\tilde{x}\|_X, \|\tilde{y}\|_Y\} \leq \delta$, por lo tanto,
$$\|b(\tilde{x}, \tilde{y})\|_Z \leq 1.$$
Por la bilinealidad de b obtenemos
$$b(\tilde{x}, \tilde{y}) = \delta^2 \frac{b(x,y)}{\|x\|_X \ \|y\|_Y},$$
concluyendo entonces
$$\|b(x,y)\|_Z \leq L\|x\|_X \ \|y\|_Y \qquad \forall\ (x,y) \in X \times Y,$$
donde $L = 1/\delta^2$.

2. Pruebe que si existe $L \geq 0$ tal que (1) se tiene, entonces b es continua en todo elemento $(x,y) \in X \times Y$.

Solución: Sea $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$ y $\varepsilon > 0$. Tomemos $\delta > 0$ tal que
$$L\delta(\|\bar{x}\| + \|\bar{y}\| + \delta) < \varepsilon.$$
Si $\text{máx}\{\|x - \bar{x}\|_X, \|y - \bar{y}\|_Y\} \leq \delta$, entonces, por la bilinealidad de b y la relación (1), se tendrá
$$\|b(\bar{x}, \bar{y}) - b(x,y)\|_Z = \|b(\bar{x}, \bar{y} - y) + b(\bar{x} - x, y)\|_Z \leq L(\|\bar{x}\|_X\|\bar{y} - y\|_Y + \|\bar{x} - x\|_X\|y\|_Y).$$
Por lo tanto,
$$\|b(\bar{x}, \bar{y}) - b(x,y)\|_Z \leq L\delta(\|\bar{x}\|_X + \|y\|_Y) \leq L\delta(\|\bar{x}\| + \|\bar{y}\| + \delta) < \varepsilon,$$
lo que nos permite concluir que b es continua en $(\bar{x}, \bar{y})$.

Pregunta 2

Considere un espacio de Hilbert $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ y una sucesión de conjuntos convexos cerrados $C_k \subseteq H$ tales que $C_{k+1} \subseteq C_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y

$$C := \bigcap_{k\in\mathbb{N}} C_k \neq \emptyset.$$

Dado $\bar{x} \in H$, para $k \in \mathbb{N}$ se define x_k como la proyección de $\bar{x}$ sobre el conjunto C_k, es decir, $x_k \in C_k$ y además

$$\|x_k - \bar{x}\| = d_{C_k}(\bar{x}) := \inf_{x\in C_k} \|x - \bar{x}\|.$$

1. Pruebe que $d_{C_k}(\bar{x}) \leq d_{C_{k+1}}(\bar{x}) \leq d_C(\bar{x})$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y, por lo tanto, existe $d^* \in \mathbb{R}$ con $d^* \leq d_C(\bar{x})$ tal que $d_{C_k}(\bar{x}) \to d^*$.

   Solución: Como $C \subseteq C_{k+1} \subseteq C_k$, se deduce $d_{C_k}(\bar{x}) \leq d_{C_{k+1}}(\bar{x}) \leq d_C(\bar{x})$ para todo $k \in \mathbb{N}$, pues si $A \subseteq B$, entonces el ínfimo sobre B es menor o igual que el ínfimo sobre A. Al ser $d_{C_k}(\bar{x})$ una sucesión creciente y acotada superiormente en $\mathbb{R}$, existirá $d^* \in \mathbb{R}$ tal que $d_{C_k}(\bar{x}) \to d^*$. Finalmente, como $d_{C_k}(\bar{x}) \leq d_C(\bar{x})$, se tendrá $d^* \leq d_C(\bar{x})$.

2. Demuestre que para todo $n \geq k$ se tendrá

   $$\left\|\frac{x_k + x_n}{2} - \bar{x}\right\| \geq d_{C_k}(\bar{x})$$

   y, por lo tanto,

   $$\frac{1}{2}\|x_n - x_k\|^2 = d^2_{C_n}(\bar{x}) + d^2_{C_k}(\bar{x}) - 2\left\|\frac{x_k + x_n}{2} - \bar{x}\right\|^2 \leq d^2_{C_n}(\bar{x}) - d^2_{C_k}(\bar{x}) \qquad \forall\, n \geq k.$$

   Solución: Para $n \geq k$ se tiene $x_n \in C_k$. Como $x_k \in C_k$ y C_k es un conjunto convexo, se deduce

   $$\frac{x_k + x_n}{2} \in C_k$$

   concluyendo así que

   $$\left\|\frac{x_k + x_n}{2} - \bar{x}\right\| \geq d_{C_k}(\bar{x}).$$

   Por otro lado, por la Ley del paralelogramo se deduce

   $$\frac{1}{2}\|x_n - x_k\|^2 = \|x_n - \bar{x}\|^2 + \|x_k - \bar{x}\|^2 - 2\left\|\frac{x_k + x_n}{2} - \bar{x}\right\|^2 = d^2_{C_n}(\bar{x}) + d^2_{C_k}(\bar{x}) - 2\left\|\frac{x_k + x_n}{2} - \bar{x}\right\|^2,$$

   que, en conjunto con la desigualdad antes obtenida, permite concluir

   $$\frac{1}{2}\|x_n - x_k\|^2 \leq d^2_{C_n}(\bar{x}) - d^2_{C_k}(\bar{x}) \qquad \forall\, n \geq k. \qquad (*)$$

3. Concluya que existe $x^* \in C$ tal que $x_k \to x^*$ y además, x^* corresponde a la proyección de $\bar{x}$ sobre C.

Solución: De la desigualdad (*), se deduce que la sucesión $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy. Como H es un Hilbert, existirá $x^* \in H$ tal que $x_k \to x^*$. Además, como para cada $k \in \mathbb{N}$ se tiene que $x_n \in C_k$ para todo $n \geq k$ y C_k es cerrado, deducimos que $x^* \in C_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y, por lo tanto, $x^* \in C$.

Finalmente, como $\|x_k - \bar{x}\| = d_{C_k}(\bar{x}) \leq d_C(\bar{x})$, se tiene

$$\|x^* - \bar{x}\| \leq d_C(\bar{x}) \leq \|x^* - \bar{x}\|,$$

donde la última desigualdad es debido a que $x^* \in C$, concluyendo entonces que x^* es la proyección de $\bar{x}$ sobre C.

Pregunta 3

Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert. Para un conjunto $C \subseteq H$ se define su *polar* mediante

$$C^\circ := \{x^* \in H \mid \langle x, x^* \rangle \leq 1 \quad \text{para todo} \quad x \in C\}.$$

1. Demuestre que para todo $C \subseteq H$ se tiene que C° es un conjunto convexo cerrado de H y además $0 \in C^\circ$.

   Solución: Sean $x^*,\ y^* \in C^\circ$ y $\lambda \in [0,1]$. Para $x \in C$ se tendrá

   $$\langle x, \lambda x^* + (1-\lambda)y^* \rangle = \lambda \langle x, x^* \rangle + (1-\lambda)\langle x, y^* \rangle \leq \lambda + (1-\lambda) = 1.$$

   Por lo tanto $\lambda x^* + (1-\lambda)y^* \in C^\circ$, probando así la convexidad de C°.

   Como $\langle 0, x \rangle = 0 \leq 1$ para todo $x \in C$, se tiene $0 \in C^\circ$. Finalmente, dada una sucesión $\{x_k^*\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq C^\circ$ convergente a x^*, para $x \in C$ se tiene $\langle x, x_k^* \rangle \leq 1$, por lo tanto $\langle x, x^* \rangle \leq 1$ para todo $x \in C$, es decir, $x^* \in C^\circ$, probando de esta manera que C° es cerrado.

2. Pruebe que $C \subseteq (C^\circ)^\circ$.

   Solución: Sea $x \in C$. Por la definición de C° se tiene que $\langle x, x^* \rangle \leq 1$ para todo $x^* \in C^\circ$, por lo tanto, $x \in (C^\circ)^\circ$.

3. Si $0 \in C$ y además C es convexo y cerrado, demuestre que si $x \notin C$, entonces existe $\bar{x} \in H \setminus \{0\}$ tal que

   $$\langle x, \bar{x} \rangle > 1 \geq \langle y, \bar{x} \rangle \qquad \forall\ y \in C,$$

   concluyendo que $\bar{x} \in C^\circ$.

   Solución: Si $x \notin C$, por el Teorema de Hahn-Banach, existe $\bar{z} \in H$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que

   $$\langle x, \bar{z} \rangle > \alpha \geq \langle y, \bar{z} \rangle \qquad \forall\ y \in C.$$

   Como $0 \in C$, de la segunda desigualdad deducimos $\alpha \geq 0$ y, por lo tanto, $\langle x, \bar{z} \rangle > 0$. Definiendo $\bar{x} = 2\bar{z}/\langle x, \bar{z} \rangle$ se obtiene

   $$\langle x, \bar{x} \rangle > 1 \geq \langle y, \bar{x} \rangle \qquad \forall\ y \in C,$$

   de donde se deduce $\bar{x} \in C^\circ$.

4. Si $0 \in C$ y además C es convexo y cerrado, pruebe que $C = (C^\circ)^\circ$.

   Solución: Sea $x \in (C^\circ)^\circ$. Si $x \notin C$, por la parte anterior existirá $\bar{x} \in C^\circ$ tal que $\langle x, \bar{x} \rangle > 1$, lo que es una contradicción con el hecho de que x esté en $(C^\circ)^\circ$. Por lo tanto, $x \in C$. De la inclusión demostrada en la segunda parte, se concluye $C = (C^\circ)^\circ$.

Tiempo: 180 minutos.