Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Matemática
Ingeniería Civil Matemática

Certamen 3 - Análisis I (MAT225)

Profesor: Pedro Gajardo
Ayudante: Simón Masnú
Fecha: 7 de septiembre 2019

Pregunta 1

Sea $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio de Hilbert y $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable. Para $x \in X$, sea $\nabla f(x) \in X$ el elemento tal que

$$Df(x)(v) = \langle \nabla f(x), v\rangle \qquad \forall\ v \in X.$$

Suponga que la función $\nabla f : X \longrightarrow X$ es Lipschitz, es decir, existe $L \geq 0$ tal que

$$\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\| \leq L\|x - y\| \qquad \forall\ x,\ y \in X,$$

donde $\|\cdot\|$ es la norma en X que define el producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

1. Para $x,\ y$ en X, defina la función $\phi_{x,y} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $\phi_{x,y}(t) = f(x + t(y - x))$. Pruebe que $\phi_{x,y}$ es continuamente diferenciable y determine $\phi'_{x,y}(t)$.
2. Para $x,\ y$ en X, y haciendo utilización de $\phi_{x,y}(t)$ y $\phi'_{x,y}(t)$ (de la pregunta anterior), demuestre que
$$f(y) - f(x) = \langle \nabla f(x), y - x\rangle + \int_0^1 \langle \nabla f(x + t(y - x)) - \nabla f(x), y - x\rangle dt.$$
3. Demuestre que
$$f(y) \leq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x\rangle + \frac{L}{2}\|x - y\|^2 \qquad \forall\ x,\ y \in X.$$

Pregunta 2

Sean $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ dos espacios vectoriales normados y $f : A \subseteq X \longrightarrow Y$ una función continuamente diferenciable, donde $\emptyset \neq A \subseteq X$ es un conjunto abierto y conexo[1].

Suponga que $Df(x) = 0$ para todo x en A.

1. Pruebe que para todo $x \in A$ y $\delta > 0$ tal que $B(x, \delta) \subseteq A$, se tiene que $f(z) = f(x)$ para todo $z \in B(x, \delta)$.
2. Para $x_0 \in A$ defina los conjuntos
$$\theta_1 = \{x \in A \mid f(x) = f(x_0)\} \qquad \text{y} \qquad \theta_2 = \{x \in A \mid f(x) \neq f(x_0)\}$$
y demuestre que son abiertos.
3. Concluya que f es una función constante.

[1] Un conjunto $A \subseteq X$ es conexo, si no existen dos abiertos θ_1 y θ_2 de X distintos de vacío, tales que $\theta_1 \cap A \neq \emptyset$, $\theta_2 \cap A \neq \emptyset$, $\theta_1 \cap \theta_2 = \emptyset$ y $A \subseteq \theta_1 \cup \theta_2$.

Pregunta 3

Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado y $(X^*, \|\cdot\|_*)$ su espacio dual, dotado de la norma

$$\|\ell\|_* = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\ell(x)}{\|x\|} = \sup_{x \in B[0,1]} \ell(x) \qquad \forall\ \ell \in X^*,$$

donde $B[0,1]$ es la bola cerrada de centro 0 y radio unitario en X.

Considere la siguiente familia de conjuntos

$$B := \{\ell^{-1}(I) \subseteq X \mid \ell \in X^*,\ I \subseteq \mathbb{R} \ \text{ abierto } \},$$

y defina $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ como la colección de todos los conjuntos que se obtienen como uniones de intersecciones finitas de elementos en B.

1. Pruebe que $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico y que si $\mathcal{T}_{\|\cdot\|}$ es la topología que induce la norma $\|\cdot\|$, entonces $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_{\|\cdot\|}$, es decir, $\mathcal{T}$ es más débil que $\mathcal{T}_{\|\cdot\|}$.
2. Para todo $\ell \in X^*$ pruebe que $\ell : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua.
3. Demuestre que $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico separado. Para ello puede utilizar la igualdad

   $$\|x\| = \sup_{\ell \in X^* \setminus \{0\}} \frac{\ell(x)}{\|\ell\|_*} \qquad \forall\ x \in X,$$

   demostrada en el certamen anterior.

Tiempo: 180 minutos.