Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Matemática
Ingeniería Civil Matemática

Certamen 3 (pauta) - Análisis I (MAT225 - MAT401)

Profesores: Isabel Flores y Pedro Gajardo
Ayudantes: Franco Cerda y Cristian Vega
Fecha: 25 de agosto 2018

Pregunta 1

Considere un espacio vectorial normado $(X, \|\cdot\|)$ y $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable.

1. Sea $K \subseteq X$ un cono no vacío, es decir, para todo $x \in K$ y $t > 0$, se tiene que $tx \in K$. Se dirá que la función $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es K-*creciente* si:

   $$x - y \in K \;\Rightarrow\; f(x) \geq f(y).$$

   Pruebe que f es K-creciente, si y solamente si, para todo $x \in X$ se tiene

   $$Df(x) \in K^+ := \{\ell \in X^* \mid \ell(y) \geq 0 \quad \forall\, y \in K\}.$$

   Solución: Supongamos f es K-creciente. Para $x \in X$ e $y \in K$, se tiene que

   $$x + ty - x = ty \in K.$$

   Por lo tanto

   $$\frac{f(x+ty) - f(x)}{t} \geq 0 \qquad \forall\, t > 0.$$

   Esto implica $Df(x)(y) \geq 0$ y como esto se tiene para cualquier $y \in K$, hemos probado que $Df(x) \in K^+$.

   Por otro lado, si $Df(z) \in K^+$ para todo $z \in X$, tomemos x e y tales que $x - y \in K$. Por el Teorema del Valor Medio, existirá $z \in]x, y[$ tal que

   $$f(x) - f(y) = Df(z)(x - y).$$

   Como $Df(z) \in K^+$ y $x - y \in K$, concluimos $f(x) \geq f(y)$, por lo tanto f es K-creciente.

2. Demuestre que f es localmente Lipschitz, si y solamente si, para todo $\bar{x} \in X$, existe $\varepsilon > 0$ y $L > 0$ tales que

   $$Df(x) \in B_{X^*}(0, L) \qquad \forall\, x \in B_X(\bar{x}, \varepsilon).$$

   Solución: Sea $\bar{x} \in X$. Si f es localmente Lipschitz, entonces existirá $\varepsilon > 0$ y $L > 0$ tales que

   $$|f(x) - f(y)| \leq \|x - y\| \qquad \forall\, x,\ y \in B_X(\bar{x}, \varepsilon).$$

   Para $x \in B_X(\bar{x}, \varepsilon)$ y $z \in X$, se tendrá que existe $\delta > 0$ tal que $x + tz \in B_X(\bar{x}, \varepsilon)$ para todo $t \in\ ]0, \delta[$ y, por lo tanto

   $$\frac{f(x+tz) - f(x)}{t} \leq L\|z\| \qquad \forall\, t \in\ ]0, \delta[,$$

concluyendo así que

$$Df(x)(z) \leq L\|z\| \qquad \forall\ z \in X$$

de donde se deduce $\|Df(x)\|_{X^*} \leq L$, es decir, $Df(x) \in B_{X^*}(0, L)$.

Por otro lado, si dado $\bar{x} \in X$, existe $\varepsilon > 0$ y $L > 0$ tales que $Df(x) \in B_{X^*}(0, L)$ para todo $x \in B_X(\bar{x}, \varepsilon)$, dados $x,\ y \in B_X(\bar{x}, \varepsilon)$, por el Teorema del Valor Medio se tendrá que existe $z \in\ ]x, y[$ tal que

$$f(x) - f(y) = Df(z)(x - y).$$

Como $z \in\ ]x, y[\ \subseteq B_X(\bar{x}, \varepsilon)$, se tiene que $Df(z) \in B_{X^*}(0, L)$ y, por lo tanto

$$|f(x) - f(y)| \leq L\|x - y\|,$$

concluyendo que f es localmente Lipschitz.

Pregunta 2

Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach, $A \subseteq X$ un conjunto abierto no vacío y $f : A \subseteq X \longrightarrow X$ una función continuamente diferenciable, tal que para todo $x \in A$, se tiene que $Df(x)$ es una función biyectiva.

1. Pruebe que para todo $\bar{y} \in f(A)$, existe $\varepsilon > 0$ y una función continuamente diferenciable $\phi : B(\bar{y}, \varepsilon) \subseteq X \longrightarrow A \subseteq X$ tal que

$$f(\phi(y)) = y \qquad \forall\ y \in B(\bar{y}, \varepsilon).$$

Solución: Sea $\bar{y} \in f(A)$ y $\bar{x} \in A$ tal que $f(\bar{y}) = \bar{x}$. Definamos la función $g : A \times X \longrightarrow X$ dada por

$$g(x, y) = f(x) - y.$$

Observar que g es continuamente diferenciable. Como $g(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ y $D_1 g(\bar{x}, \bar{y}) = Df(\bar{x})$ es biyectivo, por el Teorema de la Función Implícita, existe $\varepsilon > 0$ y una función continuamente diferenciable $\phi : B(\bar{y}, \varepsilon) \subseteq X \longrightarrow A \subseteq X$ tal que $\phi(\bar{y}) = \bar{x}$ y

$$g(\phi(y), y) = 0 \quad \forall\ y \in B(\bar{y}, \varepsilon) \Leftrightarrow\ f(\phi(y)) = y \quad \forall\ y \in B(\bar{y}, \varepsilon).$$

2. Demuestre que $f(A)$ es un conjunto abierto de X.

Solución: Sea $\bar{y} \in f(A)$. Por la parte anterior, existe $\varepsilon > 0$ y una función continuamente diferenciable $\phi : B(\bar{y}, \varepsilon) \subseteq X \longrightarrow A \subseteq X$ tal que

$$f(\phi(y)) = y \qquad \forall\ y \in B(\bar{y}, \varepsilon).$$

Por lo tanto, $B(\bar{y}, \varepsilon) \subseteq f(A)$, concluyendo que $f(A)$ es un conjunto abierto.

3. Si f es inyectiva, pruebe que $f^{-1} : f(A) \longrightarrow A$ es continuamente diferenciable.

Solución: Si f es inyectiva, entonces $f : A \longrightarrow f(A)$ es una función biyectiva. Además, para $\bar{y} \in f(A)$, existe $\varepsilon > 0$ y una función continuamente diferenciable $\phi : B(\bar{y}, \varepsilon) \subseteq X \longrightarrow A \subseteq X$ tal que

$$f(\phi(y)) = y \qquad \forall\ y \in B(\bar{y}, \varepsilon).$$

Como $f(f^{-1}(y)) = y = f(\phi(y))$ para todo $y \in B(\bar{y}, \varepsilon)$, por la inyectividad de f se deduce

$$f^{-1}(y) = \phi(y) \qquad \forall\ y \in B(\bar{y}, \varepsilon),$$

de donde concluímos que f^{-1} es continuamente diferenciable.

Pregunta 3

Considere dos espacios topológicos (X, τ_X) e (Y, τ_Y).

1. Si $A \subseteq X$ es un conjunto denso y $\theta \subseteq X$ un conjunto abierto, demuestre que

$$\overline{A \cap \theta} = \overline{\theta}.$$

Solución: Como $A \cap \theta \subseteq \theta$, se tendrá

$$\overline{A \cap \theta} \subseteq \overline{\theta}.$$

Sea ahora $x \in \overline{\theta}$ y V una vecindad de x. Entonces, $V \cap \theta \neq \emptyset$. Consideremos $w \in V \cap \theta$. Como $V \cap \theta$ es una vecindad de w y A es denso, se tiene que $A \cap (V \cap \theta) \neq \emptyset$, por lo tanto, para toda vecindad V de x, se tiene que

$$V \cap (A \cap \theta) \neq \emptyset,$$

concluyendo así que $x \in \overline{A \cap \theta}$.

2. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función biyectiva y continua. Pruebe que f es un homeomorfismo, si y solamente si,

$$f(\overline{A}) = \overline{f(A)} \qquad \forall\ A \subseteq X.$$

Solución: Si f es un homeomorfismo, en particular es una aplicación cerrada. De esta forma, dado $A \subseteq X$, se tendrá que $f(\overline{A})$ es un conjunto cerrado y como $f(A) \subseteq f(\overline{A})$ se deduce

$$\overline{f(A)} \subseteq f(\overline{A}).$$

Por otro lado, si tomamos $y \in f(\overline{A})$ y V una vecindad de y, dado $x \in \overline{A}$ tal que $f(x) = y$, por la continuidad de f se tendrá que $f^{-1}(V)$ es una vecindad de x y, por lo tanto,

$$f^{-1}(V) \cap A \neq \emptyset$$

concluyendo que

$$V \cap f(A) \neq \emptyset$$

para toda vecindad V de y, de donde se deduce que $y \in \overline{f(A)}$.

Finalmente, si

$$f(\overline{A}) = \overline{f(A)} \qquad \forall\ A \subseteq X,$$

mostremos que f es una aplicación cerrada para probar así que es un homeomorfismo. Sea $A \subseteq X$ un conjunto cerrado, entonces

$$f(A) = f(\overline{A}) = \overline{f(A)},$$

lo que nos permite concluir que $f(A)$ es un conjunto cerrado.

Tiempo: 180 minutos.