Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Matemática
Ingeniería Civil Matemática

Tarea 1 - Análisis I (MAT225 - MAT401)

Profesores: Isabel Flores y Pedro Gajardo
Ayudantes: Franco Cerda y Cristian Vega
Fecha de entrega: 20 de abril de 2018

1. Sean $(M_1, d_1), (M_2, d_2), \ldots, (M_n, d_n)$ n espacios métricos. Probar que para $p \geq 1$ se tiene que (M, δ_p) es un espacio métrico, donde $M = M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n$ y para $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in M$ e $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in M$, la función $\delta_p : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ está definida por:
$$\delta_p(x, y) = \left(\sum_{j=1}^{n} d_j(x_j, y_j)^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

2. Sea M un conjunto distinto de vacío y $d : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por
$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$
Pruebe que (M, d) es un espacio métrico.

3. Sea (M, d) un espacio métrico y $A \subset M$. Pruebe que $\overline{A}$ (la adherencia de A) es un conjunto cerrado.

4. Dado un espacio métrico (M, d) y $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ una colección de conjuntos contenidos en M, pruebe que
$$\bigcup_{\alpha \in \Lambda} \overline{A}_\alpha \subset \overline{\left(\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \right)}.$$
Adicionalmente, demuestre que si la colección de conjuntos es finita, entonces se tiene la igualdad.

5. Considere un espacio métrico (M, d). Para un conjunto $A \subset M$ se define su frontera, que la notaremos ∂A, mediante la igualdad
$$\partial A := \overline{A} \cap \overline{A^c}.$$
Demuestre las siguientes proposiciones:
   a) $\operatorname{int}(A) \cap \partial A = \emptyset$
   b) $\operatorname{int}(A) \cup \partial A = \overline{A}$
   c) $\partial A = \emptyset \Leftrightarrow \overline{A} = \operatorname{int}(A) = A$.

6. Sea (M, d) un espacio métrico completo y $\{C_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos cerrados contenidos en M tales que
$$M = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} C_k.$$
Demuestre que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\operatorname{int}(C_k) \neq \emptyset$.

7. En un espacio métrico (M, d) considere un conjunto no vacío $C \subset M$ y la función $d_C : M \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$d_C(x) := \inf_{y \in C} d(x, y),$$

denominada función distancia al conjunto C.

   a) Justifique que la función d_C está bien definida.
   b) Pruebe que la función d_C es Lipschitz.
   c) Demuestre que $d_C(x) = 0$ sí y sólo sí $x \in \overline{C}$.

8. Dado (M, d) un espacio métrico, considere dos conjuntos $C_1,\ C_2 \subset M$ cerrados, no vacíos y disjuntos.

   a) Pruebe que los conjuntos

   $$\theta_1 := \{x \in M \ : \ d_{C_1}(x) < d_{C_2}(x)\} \quad \text{y} \quad \theta_2 := \{x \in M \ : \ d_{C_2}(x) < d_{C_1}(x)\}$$

   son abiertos, donde las funciones d_{C_j} $(j = 1, 2)$ son las funciones distancia a los conjuntos C_j introducida en el problema anterior.
   b) Demuestre que existen dos abiertos θ_1 y θ_2 tales que $C_j \subset \theta_j \quad (j = 1, 2)$ y además $\theta_1 \cap \theta_2 = \emptyset$.

9. Sea (M, d) un espacio métrico y $A \subset M$ un conjunto no vacío. Para $r > 0$ se define

$$B(A, r) := \{x \in M \ : \ d_A(x) < r\}.$$

Demuestre que

$$B(A, r) = \bigcup_{x \in A} B(x, r)$$

y

$$\overline{A} = \bigcap_{r > 0} B(A, r).$$

10. Sea (V, d) un espacio métrico, donde V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Considere $A, B \subset V$.

   a) Demuestre que si A es abierto, entonces $A + B$ es abierto.
   b) Demuestre que si A es denso, entonces $A + B$ es denso.
   c) Si A y B son cerrados, diga si $A + B$ es cerrado, justifique su respuesta.

11. Sea (M,d) un espacio métrico. Demuestre que $d : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua para alguna de las métricas usuales definidas sobre $M \times M$.

12. Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) dos espacios métricos y $f : X \longrightarrow Y$ una función uniformemente continua sobre los conjuntos acotados de X. Pruebe que si la sucesión $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset X$ es de Cauchy, entonces $\{f(x_k)\}_{k \in \mathbb{N}} \subset Y$ también es una sucesión de Cauchy.

13. Considere dos espacios métricos (X, d_X) e (Y, d_Y) y $A \subset X$ un conjunto denso. Demuestre que si $f : A \longrightarrow Y$ es una función uniformemente continua sobre los subconjuntos acotados de A y el espacio métrico (Y, d_Y) es completo, entonces existe una única función continua $f^* : X \longrightarrow Y$ tal que $f^*(x) = f(x)$ para todo $x \in A$.