Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Matemática
Ingeniería Civil Matemática

Tarea 1 - Análisis I (MAT225)

Profesor: Pedro Gajardo
Ayudante: Simón Masnú
Fecha de entrega: 5 de abril de 2019

1. En $\mathbb{R}^2$ para $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ considere la siguiente función
$$d(x,y) = \begin{cases} |x_2| + |y_2| + |x_1 - y_1| & \text{si } x_1 \neq y_1 \\ |x_2 - y_2| & \text{si } x_1 = y_1. \end{cases}$$
Pruebe que $(\mathbb{R}^2, d)$ es espacio métrico y grafique la esfera $S((0,0),1)$ de acuerdo a la métrica d.

2. Sea (M,d) un espacio métrico. Demuestre que para todo $x \in M$ se tiene que $\{x\}$ es un conjunto cerrado, y concluya que todo conjunto con una cantidad finita de elementos, es también cerrado.

3. Pruebe que en un espacio métrico (M,d), para todo par de elementos distintos $x \neq y$, existen dos abiertos θ_x, θ_y disjuntos, tales que $x \in \theta_x$ e $y \in \theta_y$.

4. Pruebe que en un conjunto con una cantidad finita de elementos, todas las métricas que se pueden definir sobre él son equivalentes.

5. Considere un espacio métrico (M,d). Para un subconjunto $A \subseteq M$ se define su frontera por
$$\partial A := \overline{A} \cap \overline{A^c}.$$
Demuestre que
   a) A es abierto si y solamente si $A \cap \partial A = \emptyset$.
   b) A es cerrado si y solamente si $\partial A \subseteq A$.

6. En un espacio métrico (M,d), para $c > 0$ considere la función $d^* : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por
$$d^*(x,y) = \min\{d(x,y), c\}.$$
Demuestre que d^* es una métrica y que define los mismos abiertos que d sobre M.

7. Pruebe que la unión finita de conjuntos compactos de un espacio métrico, es un conjunto compacto.

8. Si C es un conjunto compacto distinto de vacío en un espacio métrico, demuestre que existen $x, y \in C$ tales que $\operatorname{diam}(C) = d(x,y)$.

9. Si (M,d) es un espacio métrico compacto, muestre que existe un conjunto denso $D \subset M$, que tiene una cantidad numerable de elementos.

10. Dados dos espacios métricos (X, d_X) e (Y, d_Y) y $f : X \longrightarrow Y$ una función continua, muestre que para todo conjunto $A \subseteq X$ se tiene

$$f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}.$$

11. En un espacio métrico (M, d), considere la función $d^{\triangle} : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$d^{\triangle}(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}.$$

Pruebe que $(M, d^{\triangle})$ es un espacio métrico.

12. Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) dos espacios métricos y $f : X \longrightarrow Y$ una función biyectiva. Si existe $c > 1$ tal que

$$\frac{1}{c} d_X(x, y) \leq d_Y(f(x), f(y)) \leq c\; d_X(x, y) \qquad \forall\; x,\; y \in X,$$

pruebe que si (X, d_X) es completo, entonces (Y, d_Y) es completo.

13. Considere dos espacios métricos (X, d_X) e (Y, d_Y) y $A \subset X$ un conjunto denso. Demuestre que si $f : A \longrightarrow Y$ es una función uniformemente continua sobre los subconjuntos acotados de A y el espacio métrico (Y, d_Y) es completo, entonces existe una única función continua $f^* : X \longrightarrow Y$ tal que $f^*(x) = f(x)$ para todo $x \in A$.