Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Matemática
Ingeniería Civil Matemática

Tarea 2 - Análisis I (MAT225 - MAT401)

Profesores: Isabel Flores y Pedro Gajardo
Ayudantes: Franco Cerda y Cristian Vega
Fecha de entrega: 1º de junio de 2018

1. Sea $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio vectorial normado. Pruebe que para todo $x \in X$ se tiene que $\{x\}$ es un conjunto cerrado.

2. Considere el siguiente espacio vectorial

$$\ell_1 := \left\{ \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \;\middle|\; \sum_{k\in\mathbb{N}} |x_k| < +\infty \right\}$$

y para cada $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in \ell_1$, la función

$$\|\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}\| = \sum_{k\in\mathbb{N}} |x_k|.$$

   a) Muestre que $\|\cdot\|$ es una norma sobre ℓ_1.

   b) Pruebe que el conjunto

$$C = \{\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in \ell_1 \mid x_k \geq 0, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}\}$$

   tiene interior vacío.

3. Sea $X = C^1([0,1], \mathbb{R})$ el espacio de las funciones continuas diferenciables con derivada continua (clase C^1), definidas sobre el intervalo $[0,1]$ a valores en $\mathbb{R}$. Muestre que $\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\|f\| := \sup_{t\in[0,1]} (|f(t)| + |f'(t)|) \qquad \forall\, f \in X$$

es una norma.

4. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado de dimensión finita y $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que para todo $R > 0$ existe $M > 0$ para los cuales

$$\|x\| \geq M \Rightarrow\; f(x) \geq R.$$

Demuestre que para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ el conjunto

$$L_\alpha = \{x \in X \mid f(x) \leq \alpha\}$$

es compacto y, a partir de este resultado, justifique que existe $\bar{x} \in X$ tal que

$$f(\bar{x}) = \inf_{x\in X} f(x).$$

5. Sea $X = C([a,b],\mathbb{R})$ el espacio de las funciones continuas definidas sobre el intervalo $[a,b] \subset \mathbb{R}$ a valores en $\mathbb{R}$, dotado de la norma $\|\cdot\|_\infty$. Para $g \in X$ se define la función $\ell : X \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$\ell(f) = \int_a^b f(t)g(t)dt.$$

Demuestre que ℓ es una función lineal continua.

6. Sea $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio vectoriales normado y $\ell : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función lineal. Demuestre que ℓ es continua si y sólo si, $\mathrm{Ker}(\ell) \subset X$ es un subespacio vectorial cerrado, donde

$$\mathrm{Ker}(\ell) = \{x \in X \mid \ell(x) = 0\}.$$

7. Si $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio vectorial normado y existe un conjunto compacto $C \subset X$ tal que $\mathrm{int}\,(C) \neq \emptyset$, pruebe que X es de dimensión finita.

8. Sean $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ dos espacios vectoriales normados. Se dice que una función lineal $\ell : X \longrightarrow Y$ es *compacta* si para todo conjunto acotado $C \subset X$ se tiene que $\overline{\ell(B)} \subset Y$ es compacto.

   a) Muestre que una función lineal es compacta si y sólo si, $\overline{\ell(B[0,1])} \subset Y$ es un conjunto compacto.

   b) Demuestre que toda función lineal compacta es continua.

   c) Pruebe que si $\ell \in \mathcal{L}(X,Y)$ es tal que $\ell(X) \subset Y$ es un subespacio de dimensión finita, entonces ℓ es una función lineal compacta.

   d) Si $(Y, \|\cdot\|_Y)$ es de Banach, demuestre que

   $$C(X,Y) = \{\ell : X \longrightarrow Y \mid \ell \ \text{ es compacta } \} \subset \mathcal{L}(X,Y)$$

   es un conjunto cerrado de $\mathcal{L}(X,Y)$.

9. Sea $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio de Hilbert. Dado $x_0 \in H$ y $r > 0$, considere el siguiente conjunto $C = B[x_0, r] \subset H$ (la bola cerrada centrada en x_0 y de radio r). Para $x \notin C$, encuentre la expresión de $P_C(x)$ (la proyección de x sobre C).

10. Dado $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio de Hilbert y $x_0 \in H$, se define la función lineal continua $\ell : H \longrightarrow \mathbb{R}$ por $\ell(x) = \langle x, x_0\rangle$ para todo $x \in H$. Demuestre que

$$\|\ell\|_{X^*} = \|x_0\| = (\langle x_0, x_0\rangle)^{\frac{1}{2}}.$$

11. Sea $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio de Hilbert y $A \in \mathcal{L}(H,H)$. Pruebe que para todo $y \in H$ existe $z \in H$ tal que

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, z\rangle \qquad \forall\, x \in H.$$