Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Matemática
Ingeniería Civil Matemática

Tarea 2 - Análisis I (MAT225 - MAT401)

Profesores: Eduardo Cerpa y Pedro Gajardo
Ayudantes: Sergio López y Simón Masnú
Fecha de entrega: 17 de mayo de 2019

1. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado. Pruebe que $\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua.

2. Sea $X = C^1([0,1], \mathbb{R})$ el espacio de las funciones continuas diferenciables con derivada continua (clase C^1), definidas sobre el intervalo $[0,1]$ a valores en $\mathbb{R}$. Muestre que $\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por
$$\|f\| := |f(0)| + \|f'\|_\infty \qquad \forall\, f \in X$$
es una norma.

3. Sean $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ dos espacios vectoriales normados. Se dice que una función lineal $\ell : X \longrightarrow Y$ es *compacta* si para todo conjunto acotado $C \subset X$ se tiene que $\overline{\ell(C)} \subset Y$ es compacto.

   a) Muestre que una función lineal es compacta si y sólo si, $\overline{\ell(B[0,1])} \subset Y$ es un conjunto compacto.

   b) Demuestre que toda función lineal compacta es continua.

   c) Pruebe que si $\ell \in \mathcal{L}(X,Y)$ es tal que $\ell(X) \subset Y$ es un subespacio de dimensión finita, entonces ℓ es una función lineal compacta.

   d) Si $(Y, \|\cdot\|_Y)$ es de Banach, demuestre que
   $$C(X,Y) = \{\ell : X \longrightarrow Y \mid \ell \text{ es compacta }\} \subset \mathcal{L}(X,Y)$$
   es un conjunto cerrado de $\mathcal{L}(X,Y)$.

4. Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert. Dado $x_0 \in H$ y $r > 0$, considere el siguiente conjunto $C = B[x_0, r] \subset H$ (la bola cerrada centrada en x_0 y de radio r). Para $x \notin C$, encuentre la expresión de $P_C(x)$ (la proyección de x sobre C).

5. Sea $X = \mathbb{R}^n$ dotado de la norma Euclidiana. Calcule la función $P_C(x)$, proyección de $x \in \mathbb{R}^n$ sobre el conjunto $C = \mathbb{R}^n_+$.

6. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado. Pruebe que X es Banach, si y solamente si, para toda sucesión $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset X$ tal que $\sum_{k\in\mathbb{N}} \|x_k\| < +\infty$, se tiene que la sucesión $y_n := \sum_{k=0}^{n} x_k$ converge en X cuando $n \to +\infty$.

7. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado y $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset X$ una sucesión tal que para todo $\ell \in X^* = \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$ se tiene $\sum_{k\in\mathbb{N}} |\ell(x_k)| < +\infty$. Demuestre que
$$\sup_{\|\ell\|_{X^*} \le 1} \sum_{k\in\mathbb{N}} |\ell(x_k)| < +\infty.$$

Indicación: Para $n \in \mathbb{N}$ considere el operador $\phi_n : X^* \longrightarrow \ell_1$ definido por

$$\phi_n(\ell) = (\ell(x_0), \ell(x_1), \ldots, \ell(x_{n-1}), \ell(x_n), 0, 0, \ldots),$$

donde ℓ_1 es el espacio vectorial normado

$$\ell_1 := \left\{ \{z_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \;\middle|\; \sum_{k\in\mathbb{N}} |z_k| < +\infty \right\}$$

dotado de la norma

$$\|\{z_k\}_{k\in\mathbb{N}}\|_{\ell_1} = \sum_{k\in\mathbb{N}} |z_k|.$$

Adicionalmente, considere el operador $\phi : X^* \longrightarrow \ell_1$ definido por

$$\phi(\ell) = \{\ell(x_k)\}_{k\in\mathbb{N}} = \lim_{n\to\infty} \phi_n(\ell),$$

y pruebe que ϕ está bien definido, es lineal y continuo.