Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Matemática
Ingeniería Civil Matemática

Tarea 3 - Análisis I (MAT225 - MAT401)

Profesores: Isabel Flores y Pedro Gajardo
Ayudantes: Franco Cerda y Cristian Vega
Fecha de entrega: 24 de agosto 2018

1. Sea $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert y $\ell \in \mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X, X)$ un operador lineal continuo tal que
$$\langle \ell(x), y \rangle = \langle x, \ell(y) \rangle \qquad \forall\ x,\ y \in X.$$
Considere las funciones $\phi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ y $f : X \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por
$$\phi(x) = \langle \ell(x), x \rangle \quad \text{ y } \quad f(x) = \frac{\langle \ell(x), x \rangle}{\langle x, x \rangle} = \frac{\phi(x)}{\langle x, x \rangle}.$$
   a) Muestre que $\phi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable y calcule su diferencial.
   b) Pruebe que $f : X \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable y calcule su diferencial.
   c) Demuestre que un elemento no nulo $\bar{x} \in X$ satisface $Df(\bar{x}) = 0$ si y solamente si, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\ell(\bar{x}) = \lambda \bar{x}$, es decir, $\bar{x}$ es un vector propio del operador ℓ.

2. Sea $X = \mathcal{C}([0, 1])$ el espacio de las funciones reales continuas definidas sobre el intervalo $[0, 1]$, dotado de la norma del supremo. Considere la aplicación $\psi : X \longrightarrow X$ definida por
$$\psi(f)(t) = \sin(f(t)) \qquad \forall\ t \in [0, 1].$$
Demuestre que $\psi : X \longrightarrow X$ es diferenciable en todo elemento $f \in X$ y calcule su diferencial.

3. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y $I_X : X \longrightarrow X$ la función identidad en X. En el espacio $\mathcal{L}(X)$ considere la bola abierta $B = B(I_X, 1/3)$ y la aplicación $f : B \longrightarrow \mathcal{L}(X)$ definida por
$$f(\ell) = \ell^3 := \ell \circ \ell \circ \ell \qquad \forall\ \ell \in \mathcal{L}(X).$$
   a) Demuestre que $f : B \longrightarrow \mathcal{L}(X)$ es continuamente diferenciable y calcule su diferencial.
   b) Si $\mathcal{I} : \mathcal{L}(X) \longrightarrow \mathcal{L}(X)$ es la función identidad en $\mathcal{L}(X)$, pruebe que para $\ell \in B$ se tiene
$$\|Df(\ell) - 3\mathcal{I}\| \leq 6\|\ell - I_X\| + 3\|\ell - I_X\|^2$$
   y deduzca que la aplicación $Df(\ell)$ es biyectiva para todo operador $\ell \in B$.
   c) Pruebe que para todo $\ell \in B$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $f : B(\ell, \varepsilon) \longrightarrow f(B(\ell, \varepsilon))$ es una función biyectiva.

4. Sean $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ dos espacios de Banach y $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación de clase $\mathcal{C}^2$ tal que
$$f(tx) = t^2 f(x) \qquad \forall\ x \in X,\ \forall\ t \in \mathbb{R}.$$
Mostrar que para todo $x \in X$ se tiene $D^2 f(0)(x)(x) = 2f(x)$.

5. Sea (X, τ) un espacio topológico y $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Demuestre que si para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ los conjuntos

$$S_\lambda := \{x \in X \mid f(x) < \lambda\} \quad \text{y} \quad U_\lambda := \{x \in X \mid f(x) > \lambda\}$$

son abiertos, entonces f es continua.

6. Sean (X, τ_X) y (Y, τ_Y) dos espacios topológicos. Se dice que una función $f : X \longrightarrow Y$ es una aplicación abierta, si para todo $\theta \subset X$ abierto se tiene que $f(\theta)$ as un conjunto abierto de Y. Si $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ es una familia de espacios topológicos, demuestre que para todo $\alpha \in \Lambda$, la proyección $P_\alpha : \Pi_{\alpha' \in \Lambda} X_{\alpha'} \longrightarrow X_\alpha$ es una aplicación abierta.

7. Sea (X, τ) un espacio topológico separado (o de Hausdorff) y $f : X \longrightarrow X$ una función continua. Demuestre que el conjunto

$$C = \{x \in X \mid f(x) = x\}$$

es cerrado.

8. Para (X, τ) un espacio topológico, pruebe que es separado (o de Hausdorff) si y solamente si, el conjunto $\Delta \subset X \times X$ definido por

$$\Delta := \{(x, x) \in X \times X \;\mid\; x \in X\}$$

es cerrado en $X \times X$.