Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Matemática
Ingeniería Civil Matemática

Certamen 1 - Introducción a la Ingeniería (IWG101)

Profesores: Luis Briceño y Pedro Gajardo
Ayudantes: Hugo Parada y Sebastián Torres
Fecha: 28 de abril 2017

Pregunta 1

Calcule los siguientes límites de sucesiones (recuerde justificar cada paso):

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2-1}{(n+1)(n+2)} =$
2. $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{(-1)^k+100}{k^2+3k} =$

Pregunta 2

Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua y $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión real tal que

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x^*,$$

donde $x^* \in \mathrm{dom} f$.

1. Demuestre que $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = f(x^*)$.
2. Sean $\alpha > 0$ y $\rho > 0$ y suponga $x^* \geq 0$. Demuestre que $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt{\alpha + \rho x_k} = \sqrt{\alpha + \rho x^*}$.

Pregunta 3

Suponga que la evolución de una población se representa por el siguiente modelo

$$(\forall k \in \mathbb{N}) \quad x_{k+1} = \sqrt{\alpha + \rho x_k}, \tag{1}$$

donde x_k indica el número de individuos en el k-ésimo periodo, $\alpha > 0$ y $\rho > 0$ son constantes conocidas y $x_0 \geq 0$ es el nivel de la población en el período $k = 0$.

1. Encuentre el(los) punto(s) de equilibrio del modelo (1).

2. Demuestre que
$$(\forall k \in \mathbb{N}) \quad x_{k+1} - x_k = -\frac{x_k^2 - \rho x_k - \alpha}{x_k + \sqrt{\alpha + \rho x_k}}.$$

3. Sea
$$\bar{x} = \frac{\rho + \sqrt{\rho^2 + 4\alpha}}{2}.$$
Demuestre que si $0 \leq x_0 < \bar{x}$ entonces $0 \leq x_k < \bar{x}$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

4. Demuestre que si $0 \leq x_0 < \bar{x}$ entonces $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión estrictamente creciente y acotada superiormente.

5. Demuestre que si $0 \leq x_0 < \bar{x}$ entonces $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es convergente y que el límite es $\bar{x}$.

Tiempo: 90 minutos.