Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Matemática
Ingeniería Civil Matemática

Pauta Certamen 1 - Introducción a la Ingeniería (IWG101)

Profesores: Luis Briceño y Pedro Gajardo
Ayudantes: Hugo Parada y Sebastián Torres
Fecha: 28 de abril 2017

Pregunta 1

Calcule los siguientes límites de sucesiones (recuerde justificar cada paso):

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2-1}{(n+1)(n+2)} =$

   Respuesta: Dividiendo por n^2 en el numerador y denominador se obtiene

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-1}{(n+1)(n+2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2-1/n^2}{(n^2+3n+2)/n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2-1/n^2}{1+3/n+2/n^2} = 2,$$

   donde la última igualdad proviene de $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{n} = 0$ y del resultado de álgebra de límites (límite de la suma es la suma de límites y límite del cuociente es el cuociente de los límites, si el del denominador no es 0).

2. $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{(-1)^k+100}{k^2+3k} =$

   Respuesta: Notar que la sucesión $((-1)^k+100)_{k\in\mathbb{N}}$ satisface

   $$(\forall k \in \mathbb{N}) \quad 99 \leq (-1)^k + 100 \leq 101,$$

   por lo que es acotada. Por otro lado, la sucesión $(k^2+3k)_{k\in\mathbb{N}}$ diverge a ∞, por lo que $\lim\limits_{k\to\infty} 1/(k^2+3k) = 0$. Por resultado visto en clases (nula por acotada es nula) se obtiene

   $$\lim_{k\to\infty} \frac{(-1)^k+100}{k^2+3k} = \lim_{k\to\infty} ((-1)^k+100)\frac{1}{k^2+3k} = 0.$$

Pregunta 2

Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua y $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión real tal que

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x^*,$$

donde $x^* \in \mathrm{dom} f$.

1. Demuestre que $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = f(x^*)$.

   Respuesta: Nuestras hipótesis son:

   - *Continuidad de f en x^*:*
     $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathbb{R}) \quad [(|x - x^*| < \delta) \Rightarrow |f(x) - f(x^*)| < \varepsilon]. \qquad (C)$

- *Límite de $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es x^*:*
  $(\forall\varepsilon > 0)(\exists k_0 \in \mathbb{N})(\forall k \in \mathbb{N}) \quad [k \geq k_0 \Rightarrow |x_k - x^*| < \varepsilon]. \qquad (L)$

Lo que queremos demostrar es

$$\boxed{\textit{Límite de } (f(x_k))_{k\in\mathbb{N}} \textit{ es } f(x^*)\textit{:}\ (\forall\varepsilon > 0)(\exists k_1 \in \mathbb{N})(\forall k \in \mathbb{N}) \quad [k \geq k_1 \Rightarrow |f(x_k) - f(x^*)| < \varepsilon].}$$

Sea $\varepsilon > 0$ cualquiera. Por hipótesis (C), existe $\delta > 0$ tal que

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad [|x - x^*| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x^*)| < \varepsilon]. \tag{0.1}$$

Como $\lim_{k\to\infty} x_k = x^*$, tomando $\varepsilon = \delta > 0$ en (L), existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que
$(\forall k \in \mathbb{N}) \quad [k \geq k_0 \Rightarrow |x_k - x^*| < \delta]$.
De ese modo, tomando $k_1 = k_0$, se tiene

$$(\forall k \in \mathbb{N}) \quad [(k \geq k_1) \Rightarrow |x_k - x^*| < \delta \Rightarrow |f(x_k) - f(x^*)| < \varepsilon],$$

donde la última implicancia se concluye de (0.1).

2. Sean $\alpha > 0$ y $\rho > 0$ y suponga $x^* \geq 0$. Demuestre que $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt{\alpha + \rho x_k} = \sqrt{\alpha + \rho x^*}$.

   Respuesta: La función $f(x) = \sqrt{\alpha + \rho x}$ es contínua en $[0, +\infty[$ por ser composición y suma de funciones contínuas. Por lo tanto, el resultado se deduce de la parte anterior.

Pregunta 3

Suponga que la evolución de una población se representa por el siguiente modelo

$$(\forall k \in \mathbb{N}) \quad x_{k+1} = \sqrt{\alpha + \rho x_k}, \tag{1}$$

donde x_k indica el número de individuos en el k-ésimo periodo, $\alpha > 0$ y $\rho > 0$ son constantes conocidas y $x_0 \geq 0$ es el nivel de la población en el período $k = 0$.

1. Encuentre el(los) punto(s) de equilibrio del modelo (1).

   Respuesta: Para encontrar el(los) puntos de equilibrio del modelo, basta encontrar los puntos fijos de $f(x) = \sqrt{\alpha + \rho x}$, es decir,

   $$\bar{x} = \sqrt{\alpha + \rho \bar{x}} \quad \Rightarrow \quad \bar{x}^2 - \rho \bar{x} - \alpha = 0,$$

   de donde las soluciones de la ecuación cuadrática son

   $$\bar{x}_{1,2} = \frac{\rho \pm \sqrt{\rho^2 + 4\alpha}}{2}.$$

   Luego, como $\bar{x}_2 < 0$ y x_k es siempre positivo para todo $k \in \mathbb{N}$, existe un único equilibrio dado por

   $$\bar{x} = \frac{\rho + \sqrt{\rho^2 + 4\alpha}}{2}.$$

2. Demuestre que

   $$(\forall k \in \mathbb{N}) \quad x_{k+1} - x_k = -\frac{x_k^2 - \rho x_k - \alpha}{x_k + \sqrt{\alpha + \rho x_k}}.$$

   Respuesta: Para todo $k \in \mathbb{N}$, se tiene

   $$x_{k+1} - x_k = \sqrt{\alpha + \rho x_k} - x_k = \frac{(\sqrt{\alpha + \rho x_k} - x_k)(\sqrt{\alpha + \rho x_k} + x_k)}{\sqrt{\alpha + \rho x_k} + x_k} = \frac{\alpha + \rho x_k - x_k^2}{\sqrt{\alpha + \rho x_k} + x_k},$$

   de donde se obtiene el resultado.

3. Sea

   $$\bar{x} = \frac{\rho + \sqrt{\rho^2 + 4\alpha}}{2}.$$

   Demuestre que si $0 \leq x_0 < \bar{x}$ entonces $0 \leq x_k < \bar{x}$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

   Respuesta: Por la definición (1) es claro que, para todo $k \in \mathbb{N}$, $x_k \geq 0$. Para demostrar que, para todo $k \in \mathbb{N}$, $x_k < \bar{x}$, procederemos por inducción. Sabemos que $x_0 < \bar{x}$, luego asumamos que $x_k < \bar{x}$ y demostremos que $x_{k+1} < \bar{x}$. En efecto, se tiene

   $$x_k < \bar{x} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha + \rho x_k < \alpha + \rho \bar{x} \quad \Leftrightarrow \quad x_{k+1} = \sqrt{\alpha + \rho x_k} < \sqrt{\alpha + \rho \bar{x}} = \bar{x},$$

   donde la última igualdad viene de que $\bar{x}$ es un punto fijo de $x \mapsto \sqrt{\alpha + \rho x}$.

4. Demuestre que si $0 \leq x_0 < \bar{x}$ entonces $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión estrictamente creciente y acotada superiormente.

   Respuesta: Como de la parte anterior sabemos que $0 \leq x_k < \bar{x}$, se tiene $x_k^2 - \rho x_k - \alpha < 0$ pues la función cuadrática $f(x) = x^2 - \rho x - \alpha$ es negativa en el intervalo entre sus dos raíces $](\rho - \sqrt{\rho + 4\alpha})/2, \bar{x}[$. De ese modo, de la parte 2. se deduce

   $$x_{k+1} - x_k = -\frac{x_k^2 - \rho x_k - \alpha}{x_k + \sqrt{\alpha + \rho x_k}} > 0,$$

   o equivalentemente, $x_{k+1} > x_k$, es decir, $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión estrictamente creciente. Es acotada superiormente por $\bar{x}$ (parte 3).

5. Demuestre que si $0 \leq x_0 < \bar{x}$ entonces $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es convergente y que el límite es $\bar{x}$.

   Respuesta: Como $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es creciente y acotada superiormente, es convergente por resultado visto en clase. Supongamos que el límite es $y \geq 0$. Como $\lim_{k\to\infty} x_k = y$, de la Pregunta 2, parte 2, se deduce que $\lim_{k\to\infty} \sqrt{\alpha + \rho x_k} = \sqrt{\alpha + \rho y}$ y luego de (1)

$$y = \lim_{k\to\infty} x_{k+1} = \lim_{k\to\infty} \sqrt{\alpha + \rho x_k} = \sqrt{\alpha + \rho y}.$$

   De ese modo, y es un punto fijo de la función $x \mapsto \sqrt{\alpha + \rho x}$ y de la parte 1, el único punto fijo es $\bar{x}$, de donde $y = \bar{x}$.

Tiempo: 90 minutos.