Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Matemática
Ingeniería Civil Matemática

Pauta Certamen 2 - Introducción a la Ingeniería (IWG101)

Profesores: Luis Briceño y Pedro Gajardo
Ayudantes: Hugo Parada y Sebastián Torres
Fecha: 21 de junio 2017

Pregunta 1

Dado $\beta > 0$, considere el siguiente modelo a tiempo discreto en dos variables (Romeo y Julieta)

$$(\forall\ k = 0, 1, 2, ...) \quad \begin{cases} x_{k+1} = \dfrac{x_k}{2} + \beta^2 y_k \\ y_{k+1} = x_k + \dfrac{y_k}{2}. \end{cases}$$

Determine los valores de $\beta > 0$ para los cuales se tiene que x_k e y_k tienden a cero cuando $k \to \infty$.

Respuesta: Para que x_k e y_k tienden a cero cuando $k \to \infty$, basta asegurar que los valores propios de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \beta^2 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \tag{0.1}$$

estén en el intervalo $]-1, 1[$. Calculemos los valores propios:

$$\det(A - \lambda I) = \left(\frac{1}{2} - \lambda\right)^2 - \beta^2 = \lambda^2 - \lambda + \frac{1}{4} - \beta^2 = 0 \tag{0.2}$$

que nos da como soluciones

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(1/4 - \beta^2)}}{2} = \frac{1}{2} \pm \beta. \tag{0.3}$$

Luego, para asegurar que los valores propios estén en el intervalo $]-1, 1[$, basta que $\beta \in]0, 1/2[$.

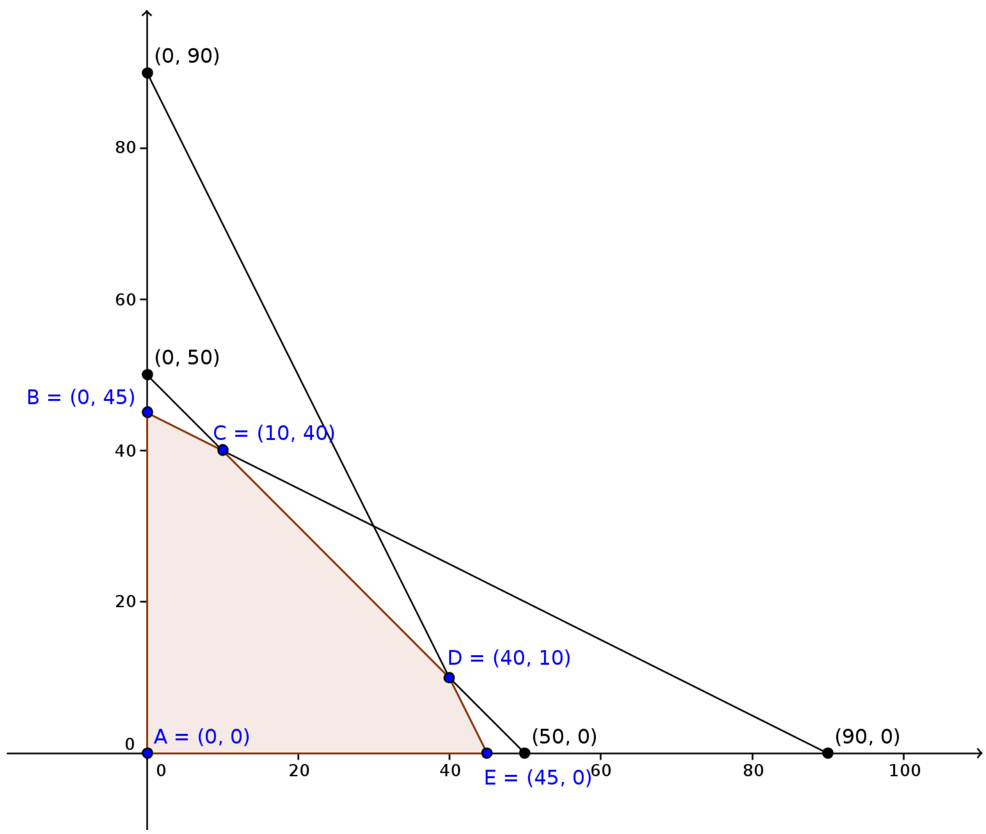
Pregunta 2

En la fabricación de abono se utilizan tres ingredientes, nitrógeno (N), fósforo (P), y potasio (K). Se dispone de 90 toneladas de N, 90 de P y 50 de K, y se desea fabricar dos tipos de abono A1 y A2. Un saco de abono A1 requiere 2 toneladas de N, 1 de P y 1 de K y se vende a 12.000 pesos. Un saco de abono A2 requiere 1 tonelada de N, 2 de P y 1 de K y se vende a 10.000 pesos. ¿Cuántos sacos de cada abono deben producirse y venderse para obtener el mayor ingreso posible?

Respuesta: Las variables de decisión a considerar son
x: número de sacos de abono A1
y: número de sacos de abono A2

La *función objetivo* que se deduce del enunciado es: $f(x, y) = 12000x + 10000y$, la cual deseamos maximizar. Finalmente, las *restricciones* estarán dadas por:

$2x + y \leq 90$ (disponibilidad de N)
$x + 2y \leq 90$ (disponibilidad de P)
$x + y \leq 50$ (disponibilidad de K)
$x \geq 0$
$y \geq 0$
Al graficar la región factible obtenemos:



Evaluando la función objetivo en cada uno de los vértices, tenemos que

Vértices	Valor función objetivo
A = (0,0)	0
B = (0,45)	450.000
C = (10,40)	520.000
D = (40,10)	580.000
E = (45,0)	540.000

Como estamos en el caso de conjunto factible acotado, la solución es 40 sacos de A1 y 10 de A2.