Optimización (MAT-275)		2^{do} **Semestre 2009**
	Tarea 2	
Pedro Gajardo		Rafael Plaza Muñoz

Problema 1

Considere el siguiente problema:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & \left(x_1 - \frac{9}{4}\right)^2 + (x_2 - 2)^2 \\ \text{sujeto a} & x_2 - x_1^2 \geq 0 \\ & x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

1. Escriba las condiciones de optimalidad de KKT y encuentre todos los puntos que cumplen con estas condiciones.
2. Para cada punto de KKT interprete gráficamente. Para ello, entregue un gráfico con las restricciones y curvas de nivel de la función objetivo. Además, grafique las direcciones de los gradientes de las restriciones y de la función objetivo. Comente la gráfica obtenida.
3. ¿Este problema tiene varios mínimos locales o sólo un mínimo global?

Problema 2

Considere el siguiente problema, donde c es un vector no nulo en $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & \langle c, d \rangle \\ \text{sujeto a} & \langle d, d \rangle \leq 1 \end{array}$$

1. Mostrar que $\bar{d} = c/\|c\|$ es un punto que satisface las condiciones de KKT. Además, demostrar que $\bar{d}$ es la única solución óptima global.
2. Elija un vector $c \in \mathbb{R}^n$ y resuelva este problema usando GAMS. Comente.

Problema 3

Considere el siguiente problema, donde a_j, b_j y c_j son constantes positivas:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{c_j}{x_j} \\ \text{sujeto a} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_j x_j = b \\ & x_j \geq 0 \text{ para } j = 1, \ldots, n. \end{array}$$

Escriba las condiciones de KKT y encuentre el o los puntos que cumplen estas condiciones.

Problema 4

Considere el siguiente problema:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & 3x_1 - x_2 + x_2^3 \\ \\ \text{sujeto a} & x_1 + x_2 + x_3 \leq 0 \\ & -x_1 + 2x_2 + x_3^2 = 0 \end{array}$$

1. Escribir las condiciones KKT y encontrar los puntos que cumplen dicha condición.
2. ¿Tiene solución este problema?

Problema 5

Demostrar utilizando las condiciones KKT que si $x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$, entonces

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j \geq \left(\prod_{j=1}^{n} x_j\right)^{1/n}$$

Problema 6

Utilizando GAMS, métodos de barrera y métodos de penalización, resuelva los siguientes problemas:

1.

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f(x) = 5\sum_{i=1}^{4} x_i - 5\sum_{i=1}^{4} x_i^2 - \sum_{i=5}^{13} x_i \\ \text{sujeto a} & g_1(x) = 2x_1 + 2x_2 + x_{10} + x_{11} - 10 \leq 0 \\ & g_2(x) = 2x_1 + 2x_3 + x_{10} + x_{12} - 10 \leq 0 \\ & g_3(x) = 2x_2 + 2x_3 + x_{11} + x_{12} - 10 \leq 0 \\ & g_4(x) = -8x_1 + x_{10} \leq 0 \\ & g_5(x) = -8x_2 + x_{11} \leq 0 \\ & g_6(x) = -8x_3 + x_{12} \leq 0 \\ & g_7(x) = -2x_4 - x_5 + x_{10} \leq 0 \\ & g_8(x) = -2x_6 - x_7 + x_{11} \leq 0 \\ & g_9(x) = -2x_8 - x_9 + x_{12} \leq 0 \\ & x_i \geq 0 \quad i = 1, \ldots, 13 \\ & x_i \leq 1 \quad i = 1, \ldots, 9, 13 \\ & x_i \leq 100 \quad i = 10, 11, 12 \end{array}$$

2.

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & f(x) = \left| \dfrac{\sum_{i=1}^{20} \cos^4(x_i) - 2\prod_{i=1}^{20} \cos^2(x_i)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{20} i x_i^2}} \right| \\ \\ \text{sujeto a} & g_1(x) = -\prod_{i=1}^{20} x_i + 0{,}75 \leq 0 \end{array}$$

$$
\begin{aligned}
&g_2(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i - 7{,}5n \leq 0 \\
&x_i \geq 0 \quad i = 1, \ldots, 20 \\
&x_i \leq 10 \quad i = 1, \ldots, 20
\end{aligned}
$$

Para cada problema compare las soluciones, entregada por el software GAMS y sus implementaciones de los métodos de optimización con restricciones entregados en clases. Analice el desempeño de sus algoritmos para al menos 10 puntos de partida distintos. Utilice los resultados de GAMS, para elegir puntos más cercas de un óptimo. ¿Qué sucede ahora, se facilita la convergencia? Comente.