Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Matemática
Ingeniería Civil Matemática

Certamen 1 - Optimización (MAT275)

Profesor: Pedro Gajardo
Ayudante: Rafael Plaza
Fecha: 4 de septiembre 2009

Pregunta 1

Sea X un espacio de Banach y $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable que satisface

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} \frac{f(x)}{\|x\|} = +\infty.$$

1. Para cada $x^* \in X^*$ muestre que la función $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = f(x) - \langle x, x^* \rangle$ es coerciva.
2. Si X es de dimensión finita, utilizando el punto anterior, demuestre que la función gradiente $\nabla f : X \longrightarrow X^*$ (que a cada $x \in X$ le asocia $\nabla f(x) \in X^*$) es sobreyectiva.

Pregunta 2

Sean $v_1, v_2, \ldots, v_m$ vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$ $(n > m)$ y $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ constantes en $\mathbb{R}$. Dado el conjunto

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \langle x, v_i \rangle = \alpha_i \ \ i = 1, 2, \ldots, m\},$$

muestre que el cono tangente a C en un punto $x \in C$, está dado por

$$T(C; x) = \{d \in \mathbb{R}^n \ : \ \langle d, v_i \rangle = 0 \ \ i = 1, 2, \ldots, m\}.$$

Pregunta 3

Considere el siguiente problema de minimización en $\mathbb{R}^3$

$$(P) \quad \left\{ \begin{array}{l} \min \ x^2 - 2x + y^2 - z^2 + 4z \\ \text{sujeto a} \\ x - y + 2z = 2. \end{array} \right.$$

Encuentre un mínimo local de (P) y justifique que existe uno solo. ¿El mínimo encontrado es global?

Tiempo: 90 minutos.