Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Matemática
Ingeniería Civil Matemática

Certamen 2 - Optimización (MAT275)

Profesor: Pedro Gajardo
Ayudante: Rafael Plaza
Fecha: 30 de octubre 2009

Pregunta 1

Sea X un espacio de Banach y $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable, cuya función gradiente $\nabla f : X \longrightarrow X^*$ es *fuertemente monótona*, lo cual quiere decir

$$\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq \alpha \|x - y\|^2 \qquad \forall\, x, y \in X, \tag{FM}$$

para alguna constante (fija) $\alpha > 0$.

Es posible demostrar que toda función con gradiente fuertemente monótono es coerciva, propiedad que puede utilizar en lo que sigue.

Considere el problema

$$\min_{x \in X} f(x)\ . \tag{P}$$

1. Si X es un espacio reflexivo, justifique la existencia de un único mínimo global del problema (P).
2. Si X es un espacio de Hilbert y la función $\nabla f : X \longrightarrow X$ además es Lipschitz, muestre que para algún $t > 0$ suficientemente pequeño, el operador $F : X \longrightarrow X$, definido por

   $$F(x) = x - t\nabla f(x),$$

   es contractante.
3. Asuma que X es un espacio de Hilbert y considere el método de máximo descenso, donde el paso en cada iteración es constante y viene dado por algún $t > 0$ suficientemente pequeño, como en el punto anterior. Muestre que la sucesión obtenida utilizando este método (a partir de cualquier punto inicial), converge a la única solución de (P).

Pregunta 2

Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable, cuyo gradiente es Lipschitz. Para minimizar f sobre $\mathbb{R}^n$, a partir de un punto inicial $x_0 \in \mathbb{R}^n$, considere un método de descenso $x_{k+1} = x_k + t_k d_k$ y asuma que se tiene lo siguiente:

(a) El conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n \ : \ f(x) \leq f(x_0)\}$ es acotado.

(b) Para algún $\varepsilon > 0$, las direcciones de descenso d_k satisfacen

$$-\frac{\langle \nabla f(x_k), d_k \rangle}{\|\nabla f(x_k)\|\ \|d_k\|} \geq \varepsilon \qquad \forall\ k \geq 0.$$

(c) Existen dos constantes M y m positivas tales que

$$m\|\nabla f(x_k)\| \leq \|d_k\| \qquad \text{y} \qquad \|d_k\| \leq M \qquad \forall\ k \geq 0.$$

(d) El paso $t_k > 0$ satisface

$$t_k \geq \text{mín}\{1, \gamma\|\nabla f(x_k)\|^2\} \qquad \forall\ k \geq 0,$$

para algún $\gamma > 0$.

1. Pruebe que f es acotada inferiormente y que $\lim_{k\to+\infty} f(x_k)$ existe.
2. Demuestre que
$$\lim_{k\to+\infty} t_k\|\nabla f(x_k)\|^2 = 0.$$
3. Concluya que
$$\lim_{k\to+\infty} \|\nabla f(x_k)\|^2 = 0.$$

Tiempo: 90 minutos.