UNIVERSIDAD TECNICA
FEDERICO SANTA MARIA

Departamento de Matemática
2007

Certamen 3

Curso: Optimización (MAT 275)
Profesor: Pedro Gajardo
Fecha: 3 de diciembre 2007

Pregunta 1

1. Resuelva los siguientes problemas en $\mathbb{R}^2$

   - $$\begin{aligned} &\text{mín } (x-1)^2 + (y-2)^2 \\ &(x-1)^2 = y \end{aligned} \tag{P_1}$$

   - $$\begin{aligned} &\text{mín} -xy \\ &x^2 + y^2 \leq 1 \end{aligned} \tag{P_2}$$

2. Dado un vector $y \in \mathbb{R}^n$ y una matriz simétrica A de $n \times n$ definida positiva, muestre que el valor del problema de optimización

$$\begin{aligned} &\text{máx } \langle x, y \rangle \\ &\langle x, Ax \rangle \leq 1 \end{aligned} \tag{P_A}$$

   es $\sqrt{\langle y, A^{-1}y \rangle}$. Utilizando lo anterior, demuestre que

$$\langle x, y \rangle \leq \sqrt{\langle x, Ax \rangle}\sqrt{\langle y, A^{-1}y \rangle} \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$$

   para toda matriz A simétrica definida positiva.

Pregunta 2

Considere los siguientes problemas lineales

$$(P) \quad \begin{cases} \text{mín} \quad \langle c, x \rangle \\ Ax = b \\ x \geq 0 \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \qquad\qquad (D) \quad \begin{cases} \text{mín} \ \ \langle b, \lambda \rangle \\ A^\top \lambda + c \geq 0 \\ \lambda \in \mathbb{R}^m \end{cases}$$

donde $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ y A es una matriz de $m \times n$.

1. Demuestre que

$$\left.\begin{array}{r} \exists\ \mu^* \in \mathbb{R}^n \ \text{ tal que} \\ (x^*, \lambda^*, \mu^*) \in \mathbb{R}^{n+m+n} \\ \text{satisface KKT para } \ (P) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (\lambda^*, x^*) \in \mathbb{R}^{m+n} \\ \text{satisface KKT para } \ (D) \end{array}\right.$$

2. Deduzca que el problema (P) tiene solución sí y solamente sí el problema (D) tiene solución.
3. Si $x^* \in \mathbb{R}^n$ es una solución (¿global o local?) de (P) y $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$ solución de (D), muestre que

$$\langle c, x^* \rangle + \langle b, \lambda^* \rangle = 0.$$

Pregunta 3

Considere el problema

$$\begin{aligned} &\text{mín} \;\; f(x) \\ &g_j(x) \leq 0 \;\; j = 1, \ldots, p \\ &x \in C \end{aligned} \tag{P}$$

donde $f,\ g_j : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ y C es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$.
Sea $x^* \in \mathbb{R}^n$ un vector factible para (P) y $\mu^* \in \mathbb{R}^p_+$ un vector que satisface

$$\mu^*_j = 0 \quad \forall\, j \notin I(x^*)$$

donde $I(x^*) \subseteq \{1, \ldots, p\}$ es el conjunto de índices de las restricciones activas en x^*. Definiendo el *Lagrangeano* asociado

$$L(x, \mu) = f(x) + \langle g(x), \mu \rangle,$$

pruebe que si x^* es un mínimo de $L(\cdot, \mu^*)$ sobre C, i.e.

$$L(x^*, \mu^*) = \min_{x \in C} L(x, \mu^*),$$

entonces x^* es un mínimo global del problema (P).

Pregunta 4

Dadas las funciones $h_i,\ g_j : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, p)$ de clase $\mathcal{C}^1$, se define el siguiente conjunto de $\mathbb{R}^n$

$$C := \{x \in \mathbb{R}^n \;:\; h_i(x) = 0 \;\; i = 1, \ldots, m, \;\; g_j(x) \leq 0 \;\; j = 1, \ldots, p\}.$$

Para cada $x \in C$ considere el conjunto

$$V(x) := \{d \in \mathbb{R}^n \;:\; \langle \nabla h_i(x), d \rangle = 0 \;\; i = 1, \ldots, m, \;\; \langle \nabla g_j(x), d \rangle \leq 0 \;\; j \in I(x)\}$$

donde $I(x) \subseteq \{1, \ldots, p\}$ es el conjunto de índices de las restricciones activas en x.

1. Demuestre que $T_C(x) \subseteq V(x)$ para todo $x \in C$ donde $T_C(x)$ es el cono tangente a C en x.
2. Muestre que si las funciones h_i y g_j son lineales afines, entonces $T_C(x) = V(x)$ para todo $x \in C$.

Tiempo: 3 horas.