UNIVERSIDAD TECNICA
FEDERICO SANTA MARIA

Departamento de Matemática
2007

Certamen 1 Optimización año 2007

Profesor: Pedro Gajardo
Fecha: 8 de octubre 2007

Pregunta 1

Considere una función $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^2$.

1. Muestre que para todo par de vectores $x,\ y \in \mathbb{R}^n$ existe $z \in]x, y[:= \{\lambda x + (1-\lambda)y \ :\ \lambda \in]0,1[\}$ tal que
$$f(y) = f(x) + \langle \nabla f(x), y - x\rangle + \frac{1}{2}\langle y - x, D^2 f(z)(y - x)\rangle.$$

2. Si para un determinado $x^* \in \mathbb{R}^n$ se tiene que $\nabla f(x^*) = 0$ y $D^2 f(x)$ es una matriz semidefinida positiva para todo x en una vecindad de x^*, demuestre que x^* es un mínimo local de f.

3. Si para un determinado conjunto convexo $C \subseteq \mathbb{R}^n$ existe una constante $M > 0$ tal que
$$\|D^2 f(x)y\| \leq M\|y\| \qquad \forall\ x \in C,\ \forall\ y \in \mathbb{R}^n,$$
pruebe que el gradiente de f es un operador de tipo Lipschitz sobre el conjunto C.

Pregunta 2

1. Considere el siguiente problema de programación lineal
$$\min_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ Ax\leq b}} \langle c, x\rangle \tag{PL}$$
donde $c \in \mathbb{R}^n$, A es una matriz de $m \times n$ y $b \in \mathbb{R}^m$. Si se satisface la siguiente inclusión
$$\{d \in \mathbb{R}^n \ :\ Ad \leq 0\} \setminus \{0\} \subseteq \{d \in \mathbb{R}^n \ :\ \langle c, d\rangle > 0\},$$
demuestre que existe $x^* \in \mathbb{R}^n$ solución del problema (PL).

2. Sea $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^1$ cuyo gradiente es un operador Lipschitz de constante $L > 0$. Muestre que para todo $r > L$ la función
$$f(x) = g(x) + \frac{r}{2}\|x\|^2$$
es estrictamente convexa.

3. Considere el siguiente problema de mínimos cuadrados

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{1}{2}\|F(x)\|^2 \tag{PMC}$$

donde $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ y $\|\cdot\|$ representa la norma Euclidiana en $\mathbb{R}^m$. Si el operador F viene dado por

$$F(x) = Ax - b,$$

donde A es una matriz de $m \times n$ a rango completo y $b \in \mathbb{R}^m$, demuestre que existe una única solución del problema (PMC) y obtenga una expresión de esta.

Pregunta 3:

Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^2$ que satisface,

$$m\|y\|^2 \leq \langle y, D^2 f(x) y\rangle \leq M\|y\|^2 \qquad \forall\ x,\ y \in \mathbb{R}^n,$$

donde m y M son dos constantes positivas.

Pruebe que la función f tiene un único mínimo global x^* el cual satisface

$$\frac{m}{2}\|x - x^*\|^2 \leq f(x) - f(x^*) \leq \frac{M}{2}\|x - x^*\|^2 \qquad \forall\ x \in \mathbb{R}^n,$$

y

$$\frac{1}{2M}\|\nabla f(x)\|^2 \leq f(x) - f(x^*) \leq \frac{1}{2m}\|\nabla f(x)\|^2 \qquad \forall\ x \in \mathbb{R}^n,$$

Indicación: Utilice la primera parte de la Pregunta 1 y el hecho de que para $\alpha > 0$ se tiene

$$\min_{y\in\mathbb{R}^n} \left\{\langle \nabla f(x), y - x\rangle + \frac{\alpha}{2}\|y - x\|^2\right\} = -\frac{1}{2\alpha}\|\nabla f(x)\|^2.$$

Pregunta 4:

Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^1$. Considere el problema de optimización cónica siguiente

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n_+} f(x) \tag{POC}$$

1. Muestre que si $x^* \in \mathbb{R}^n$ es una solución del problema (POC) entonces satisface las siguientes condiciones:

$$x^* \in \mathbb{R}^n_+, \quad \nabla f(x^*) \in \mathbb{R}^n_+, \quad \langle \nabla f(x^*), x^*\rangle = 0. \tag{COPO}$$

2. Justifique que si la función f es convexa, las condiciones descritas en (COPO) son suficientes.
3. Calcule el elemento mínimo (¿por qué existe y es único?) del problema

$$\min_{\substack{x_1\geq 0\\ x_2\geq 0}} x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 - x_1.$$

Tiempo: 3 horas.