Departamento de Matemática
2008

UNIVERSIDAD TECNICA
FEDERICO SANTA MARIA

Examen Optimización año 2008

Profesor: Pedro Gajardo
Ayudante: Rafael Plaza
Fecha: 18 de diciembre 2008

Pregunta 1

Sea $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert real y $A \in \mathcal{L}(X)$ un operador lineal continuo de X en X. Suponga que existe $\alpha > 0$ tal que

$$\langle Ax, x\rangle \geq \alpha \|x\|^2 \qquad \forall\, x \in X.$$

Notaremos $A^* : X \longrightarrow X$ al operador lineal (continuo) adjunto de A.

Para un conjunto no vacío $C \subseteq X$ cerrado y convexo, demuestre que existe un único $\bar{x} \in C$ tal que

$$\langle (A + A^*)\bar{x}, y - \bar{x}\rangle \geq 0 \qquad \forall\, y \in C.$$

Para lo anterior, considere el problema de optimización

$$\begin{cases} \min \langle Ax, x\rangle \\ x \in C. \end{cases} \tag{P}$$

Pregunta 2

Sean $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ y $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones continuamente diferenciable. Para $T \in \mathbb{N}$ y $x_0 \in \mathbb{R}^n$ considere el problema siguiente:

$$\begin{cases} \min \displaystyle\sum_{t=0}^{T-1} \rho^t g(x_t, u_t) \\ x_{t+1} = f(x_t, u_t) \qquad t \in \{0, 1, \ldots, T-1\} \\ u_t \in U \qquad t \in \{0, 1, \ldots, T-1\} \end{cases} \tag{COD}$$

donde $\rho \in]0, 1[$ y $U = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_m, b_m] \subseteq \mathbb{R}^m$.

Formule las condiciones de optimalidad de primer orden del problema (COD).

Pregunta 3

Sea $X = \mathbb{R}^n$ y $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función convexa y continuamente diferenciable. Demuestre que

$$\bar{x} \text{ es solución de } \ (P_+)\begin{cases} \min f(x) \\ x \geq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \nabla f(\bar{x}) \geq 0 \\ \bar{x} \geq 0. \end{cases}$$

Tiempo: 2 horas.