Departamento de Matemática
2008

UNIVERSIDAD TECNICA
FEDERICO SANTA MARIA

Certamen 2 Optimización año 2008

Profesor: Pedro Gajardo
Ayudante: Rafael Plaza
Fecha: 15 de noviembre 2008

Pregunta 1

Sea X un espacio de Hilbert con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable y acotada inferiormente. Considere el problema de optimización siguiente:

$$\min_{x \in X} f(x) \ . \tag{P}$$

Para realizar lo anterior, se propone construir una sucesión $\{x_k\}_{k \in I\!N} \subset X$ de la forma

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + t_k d_k \\ x_0 \in X \quad \text{dado} \end{cases}$$

donde $d_k \in X$ es una dirección de descenso en x_k y $t_k > 0$ es el paso dado en la dirección d_k.

1. Si el paso $t_k > 0$ es elegido de manera que se obtiene

$$f(x_{k+1}) \leq f(x_k) - \varepsilon_k \qquad \forall \ k \in I\!N \tag{*}$$

   donde $\varepsilon_k > 0$, muestre que $\varepsilon_k \to 0$.

2. Si d_k es la dirección de máximo descenso, $\varepsilon_k = -mt_k \langle \nabla f(x_k), d_k \rangle$ para algún $m > 0$ (constante) y el paso $t_k > 0$ es mayor o igual a un valor $\delta > 0$ para todo $k \in I\!N$ y elegido de manera tal que se satisface (*), muestre que

$$\nabla f(x_k) \to 0.$$

Pregunta 2

Considere el problema (P) de la pregunta anterior con $X = \mathbb{R}^n$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ el producto interno usual y $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función convexa continuamente diferenciable. El objetivo es estudiar el comportamiento de la sucesión $\{x_k\}_{k \in I\!N} \subset X$ dado por

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k - t_k \nabla f(x_{k+1}) \\ x_0 \in X \quad \text{dado} \end{cases}$$

donde $t_k > 0$.

1. Pruebe que para todo $k \in I\!N$ se tiene

$$t_k|\nabla f(x_{k+1})|^2 \leq f(x_k) - f(x_{k+1}).$$

2. Si $\sum_{k \in I\!N} t_k = +\infty$ demuestre que

$$\liminf_{k\to+\infty} |\nabla f(x_k)| = 0 \quad \text{ó} \quad f(x_k) \to -\infty.$$

3. Sea x^* una solución del problema (P). Muestre que la sucesión $a_k := |x_k - x^*|$ es decreciente. Para ello, muestre que se tiene

$$|x_{k+1} - x^*|^2 = |x_k - x^*|^2 - |x_{k+1} - x_k|^2 - 2t_k\langle \nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x^*), x_{k+1} - x^*\rangle \ .$$

4. Si el problema (P) tiene solución y existe $\varepsilon > 0$ tal que $t_k > \varepsilon$ para todo $k \in I\!N$, demuestre que todo punto de acumulación de la sucesión $\{x_k\}_{k \in I\!N}$ (justifique que al menos existe uno) es solución del problema (P).

Tiempo: 3 horas.