Departamento de Matemática
2008

UNIVERSIDAD TECNICA
FEDERICO SANTA MARIA

Certamen 1 Optimización año 2008

Profesor: Pedro Gajardo
Ayudante: Rafael Plaza
Fecha: 18 de octubre 2008

Pregunta 1

Sea X un espacio de Hilbert con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y $\| \cdot \|$ una norma definida en X no necesariamente la inducida por el producto interno pero equivalente con esta. Para un vector no nulo $\bar{z} \in X$ considere el problema

$$P(\bar{z}) \qquad \min_{\substack{d \in X \\ \|d\| \leq 1}} \langle \bar{z}, d \rangle$$

1. Argumente que para todo $\bar{z} \neq 0$ el problema $P(\bar{z})$ tiene solución y determine una.
2. Si la norma $\| \cdot \|$ es la inducida por el producto interno, pruebe que para todo $\bar{z} \neq 0$ el problema $P(\bar{z})$ tiene una única solución.
3. Sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable y $\bar{x} \in X$ un elemento tal que $\nabla f(\bar{x}) \neq 0$. Pruebe que para toda solución $\bar{d}$ del problema $P(\nabla f(\bar{x}))$ se tiene que existe $\bar{t} > 0$ tal que

$$f(\bar{x} + t\bar{d}) < f(\bar{x}) \qquad \forall\ t \in]0, \bar{t}].$$

Pregunta 2

Sea $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función continua y $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto cerrado no vacío. Para $\varepsilon \geq 0$ considere el problema

$$(P_\varepsilon) \qquad \min_{x \in C} \|F(x)\|^2 + \varepsilon \|x\|^2$$

donde $\| \cdot \|$ denota la norma Euclidiana en los espacios respectivos.

1. Muestre que para todo $\varepsilon > 0$ se tiene que el conjunto solución del problema (P_ε), que notaremos $S(P_\varepsilon)$, es no vacío y compacto.
2. Para las próximas preguntas asuma $S(P_0) \neq \emptyset$.

   a) Mostrar que el subproblema

   $$(SP) \qquad \min_{x \in S(P_0)} \|x\|^2$$

   tiene un conjunto solución no vacío y acotado.

   b) Mostrar que para todo $\varepsilon > 0$ se tiene

   $$\mathrm{val}(P_\varepsilon) \leq \mathrm{val}(P_0) + \varepsilon\, \mathrm{val}(SP),$$

   donde $\mathrm{val}(\cdot)$ es el valor óptimo del problema correspondiente.

c) Para $\varepsilon > 0$ demuestre que si $x_\varepsilon \in S(P_\varepsilon)$ y $\bar{x} \in S(P_0)$ entonces se tiene

$$\|F(\bar{x})\| \leq \|F(x_\varepsilon)\|, \qquad \|x_\varepsilon\| \leq \|\bar{x}\|.$$

d) Sea $\varepsilon_k \to 0^+$ y $x_k \in S(P_{\varepsilon_k})$.

1) Justifique que la sucesión x_k tiene al menos un punto de acumulación y que cualquiera sea este pertenecerá a $S(SP)$.
2) Demuestre la igualdad

$$\mathrm{val}(P_{\varepsilon_k}) = \mathrm{val}(P_0) + \varepsilon_k \,\mathrm{val}(SP) + o(\varepsilon_k).$$

Tiempo: 3 horas.