Departamento de Matemática
2008

UNIVERSIDAD TECNICA
FEDERICO SANTA MARIA

Examen Optimización año 2008

Profesor: Pedro Gajardo
Ayudante: Rafael Plaza
Fecha: 18 de diciembre 2008

Pregunta 1

Sea $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio de Hilbert real y $A \in \mathcal{L}(X)$ un operador lineal continuo de X en X. Suponga que existe $\alpha > 0$ tal que

$$\langle Ax, x\rangle \geq \alpha \|x\|^2 \qquad \forall\ x \in X.$$

Notaremos $A^* : X \longrightarrow X$ al operador lineal (continuo) adjunto de A.

Para un conjunto no vacío $C \subseteq X$ cerrado y convexo, demuestre que existe un único $\bar{x} \in C$ tal que

$$\langle (A + A^*)\bar{x}, y - \bar{x}\rangle \geq 0 \qquad \forall\ y \in C.$$

Para lo anterior, considere el problema de optimización

$$\begin{cases} \min \langle Ax, x\rangle \\ x \in C. \end{cases} \tag{P}$$

Pregunta 2

Sea X un espacio de Hilbert con producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ y $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable y acotada inferiormente. Considere el problema de optimización siguiente:

$$\min_{x \in X} f(x)\ . \tag{P}$$

Para realizar lo anterior, se propone construir una sucesión $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset X$ de la forma

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + t_k d_k \\ x_0 \in X \quad \text{dado} \end{cases}$$

donde $d_k \in X$ es una dirección de descenso en x_k y $t_k > 0$ es el paso dado en la dirección d_k.

1. Si el paso $t_k > 0$ es elegido de manera que se obtiene

$$f(x_{k+1}) \leq f(x_k) - \varepsilon_k \qquad \forall\ k \in \mathbb{N} \tag{*}$$

donde $\varepsilon_k > 0$, muestre que $\varepsilon_k \to 0$.

2. Si d_k es la dirección de máximo descenso, $\varepsilon_k = -mt_k\langle\nabla f(x_k), d_k\rangle$ para algún $m > 0$ (constante) y el paso $t_k > 0$ es mayor o igual a un valor $\delta > 0$ para todo $k \in I\!N$ y elegido de manera tal que se satisface (*), muestre que

$$\nabla f(x_k) \to 0.$$

Tiempo: 2 horas.