Departamento de Matemática
2008

UNIVERSIDAD TECNICA
FEDERICO SANTA MARIA

Certamen 3 Optimización año 2008

Profesor: Pedro Gajardo
Ayudante: Rafael Plaza
Fecha: 13 de diciembre 2008

Pregunta 1

Sean X e Y dos espacios de Banach, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $h : X \longrightarrow Y$ y $g_i : X \longrightarrow \mathbb{R}$ para $i = 1, \ldots, m$ funciones diferenciables. Considere el problema siguiente:

$$(P) \begin{cases} \text{mín } f(x) \\ h(x) = 0 \\ g_i(x) \leq 0 \qquad i = 1, \ldots, m \end{cases}$$

y el Langrangeano asociado $L : X \times Y^* \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$L(x, \lambda, \mu) = f(x) + \langle h(x), \lambda \rangle + \langle g(x), \mu \rangle$$

donde $g = (g_1, \ldots, g_m)$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota los productos de dualidad en los espacios correspondientes.

1. Para $\bar{\lambda} \in Y^*$ y $\bar{\mu} = (\bar{\mu}_1, \ldots, \bar{\mu}_m) \geq 0$ se define el problema

   $$(D_{\bar{\lambda},\bar{\mu}}) \begin{cases} \text{mín } L(x, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) \\ x \in X. \end{cases}$$

   Muestre que si existe $\bar{\lambda} \in Y^*$ y $\bar{\mu} = (\bar{\mu}_1, \ldots, \bar{\mu}_m) \geq 0$ tal que $\bar{x} \in X$ es mínimo local (resp. global) de $(D_{\bar{\lambda},\bar{\mu}})$, entonces $\bar{x}$ es también mínimo local (resp. global) del problema (P).

2. Suponga que f y $g_i : X \longrightarrow \mathbb{R}$, para $i = 1, \ldots, m$, son funciones convexas y la función h viene dada por $h(x) = Ax - b$ donde $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ y $b \in Y$.

   Pruebe que si existe $(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) \in X \times Y^* \times \mathbb{R}^m$ que satisfacen las condiciones de KKT para el problema (P) (enúncielas) entonces $\bar{x}$ es mínimo (¿global o local?) del problema (P).

3. Si $X = \mathbb{R}^n$ y f es convexa, pruebe que

   $$\bar{x} \text{ es solución de } \ (P_+) \begin{cases} \text{mín } f(x) \\ x \geq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \nabla f(\bar{x}) \geq 0 \\ \bar{x} \geq 0. \end{cases}$$

Pregunta 2

Sea $c \in \mathbb{R}^n$, $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ una matriz simétrica definida positiva y $r > 0$. Considere el problema de optimización siguiente:

$$(R) \begin{cases} \text{mín}\langle c, x\rangle \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1 \\ \langle Ax, x\rangle \leq r \\ x \geq 0 \end{cases}$$

1. Justifique que la condición de Slater (enúnciela) es suficiente para poder asegurar la existencia de los multiplicadores de KKT en un mínimo del problema (R).
2. Pruebe que la condición de Slater se satisface si y solamente si,

$$r > r^* := \text{mín}\left\{ \langle Ax, x\rangle \ : \sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \quad x \geq 0 \right\}.$$

3. Si $r > r^*$ y $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ es un mínimo de (R) muestre que existe $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}$ y $\bar{\mu} \in \mathbb{R}_+$ tal que $\bar{x}$ es solución del problema

$$\begin{cases} \text{mín}\langle c, x\rangle + \bar{\lambda}(1 - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i) + \bar{\mu}(\langle Ax, x\rangle - r) \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Pruebe también que $\langle c, \bar{x}\rangle + 2\bar{\mu}r \geq \bar{\lambda}$.

Tiempo: 3 horas.