UNIVERSIDAD TECNICA
FEDERICO SANTA MARIA

Departamento de Matemática
2008

Examen Optimización año 2008

Profesor: Pedro Gajardo
Ayudante: Rafael Plaza
Fecha: 18 de diciembre 2008

Pregunta 1

Sea $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert real y $A \in \mathcal{L}(X)$ un operador lineal continuo de X en X. Suponga que existe $\alpha > 0$ tal que

$$\langle Ax, x \rangle \geq \alpha \|x\|^2 \qquad \forall\, x \in X.$$

Notaremos $A^* : X \longrightarrow X$ al operador lineal (continuo) adjunto de A.

Para un conjunto no vacío $C \subseteq X$ cerrado y convexo, demuestre que existe un único $\bar{x} \in C$ tal que

$$\langle (A + A^*)\bar{x}, y - \bar{x} \rangle \geq 0 \qquad \forall\, y \in C.$$

Para lo anterior, considere el problema de optimización

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \langle Ax, x \rangle \\ x \in C. \end{array} \right. \tag{P}$$

Pregunta 2

Sea $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert real y $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable. Considere el problema

$$\left\{ \begin{array}{l} \min f(x) \\ x \in X. \end{array} \right. \tag{PR}$$

El objetivo es estudiar el comportamiento de la sucesión $\{x_k\}_{k \in I\!N} \subset X$ dado por

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{k+1} = x_k - t_k \nabla f(x_{k+1}) \\ x_0 \in X \quad \text{dado} \end{array} \right.$$

donde $t_k > 0$.

Si existe $M > 0$ tal que para todo $k \in I\!N$ se tiene

$$t_k |\nabla f(x_{k+1})|^2 \leq M(f(x_k) - f(x_{k+1}))$$

y además $\sum_{k \in I\!N} t_k = +\infty$, demuestre que

$$\liminf_{k \to +\infty} |\nabla f(x_k)| = 0 \quad \text{ó} \quad f(x_k) \to -\infty.$$

Tiempo: 2 horas.