Certámenes Antiguos MAT-022.

Mauricio Godoy Molina

2° Semestre 2006.

1. Álgebra II - Civiles. Certamen N°3 de Recuperación 18/07/91

1. Determinar si son verdaderas o falsas las siguientes proposiciones:

   a) $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$, n impar $\rightarrow \det(A - A^t) = 0$.

   b) $A + A^t$ es simétrica.

   c) A simétrica $\rightarrow A^2$ simétrica.

   d) $\exists A \in M_2(\mathbb{C})$ tal que $A^2 + A = -I_2$.

   e) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & -b \\ 0 & b & a \end{pmatrix}$ $a \neq 0 \vee b \neq 0 \rightarrow \exists A^{-1}$.

2. Determinar la relación que deben cumplir a, b, c, d para que el siguiente sistema tenga infinitas soluciones:

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1 + ax_2 + a^2x_3 + a^3x_4 & = & 0 \\ x_1 + bx_2 + b^2x_3 + b^3x_4 & = & 0 \\ x_1 + cx_2 + c^2x_3 + c^3x_4 & = & 0 \\ x_1 + dx_2 + d^2x_3 + d^3x_4 & = & 0 \end{array}\right|$$

3. Si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Resolver $(X^t + B^t)^t = A^2 + BAB$.

4. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ \lambda & 0 & 3 & 4 \\ \mu & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

   a) Determinar la relación entre λ y μ para que exista A^{-1}.

   b) Si $\lambda = \mu = 0$. Calcular A^{-1}.

2. MAT-112 Álgebra Elemental II (Civil). Certamen 2 25/10/88

2.1. Ejercicios Obligatorios

1. Sean $\vec{a} = (1, 0, -1)$, $\vec{b} = (-2, \lambda, 3)$, y $\vec{c} = (2, -1, 2)$

   a) Determine $\lambda \in \mathbb{R}$ de modo que el ángulo entre $\vec{a} \times \vec{b}$ y $\vec{c}$ sea igual a $\pi/3$.

   b) Determine la dimensión y una base del subespacio vectorial W de $\mathbb{R}^3$ generado por $\vec{a}$ y $\vec{c}$. ¿Pertenece el vector $\vec{d} = (5, -2, 7)$ al subespacio W?

   c) El conjunto $M = \{\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}\}$ ¿es l.i o l.d?

2. Sean $M_1 : 2x + 3y - z = 5$, y $M_2 : (\vec{r} - (2, 1, 3)) \cdot (3, -5, 2) = 0$ dos planos dados.

   a) Determine la ecuación simétrica y la ecuación paramétrica de la recta $L = M_1 \cap M_2$.

   b) Determine el ángulo entre los planos M_1 y M_2.

2.2. Ejercicios Electivos

3. Se requiere pintar la superficie externa de un tetraedro cuyos vértices están ubicados en los puntos de coordenadas $(5[m], -1[m], 10[m])$, $(0, 5[m], 0)$, $(5[m], 0, 0)$ y $(0, 0, 0)$. ¿Cuántos litros de pintura se necesitan si el rendimiento de la pintura es $10[m^2]$ por litro?

4. En un experimento en el Laboratorio de Física se constata que la fuerza que actúa sobre una partícula tiene dirección y magnitud constante. En ese ambiente considere dos puntos $A, B \in \mathbb{R}^3$ distintos. Por la naturaleza del experimento, las partículas consideradas están restringidas a moverse sólo a lo largo de trayectorias poligonales (esto es, trayectorias formadas únicamente por segmentos rectilíneos) que van desde A hasta B. Demuestre o refute la siguiente afirmación: "El trabajo necesario para mover una partícula desde A hasta B es una constante que no depende de la trayectoria particular seguida por la partícula".

5. Hallar la menor distancia entre la recta $L : x = 7 - 3t$, $y = -5 + 4t$, $z = 6 + 2t$, $t \in \mathbb{R}$, y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

3. Segundo Certamen Álgebra Elemental II - Ejecución 03/11/88

1. Una elipse tiene en el sistema $x - y$ de coordenadas sus ejes mayor y menor sobre las rectas $L_1 : \overrightarrow{OP} = t(\sqrt{3}, 1)$ y $L_2 : \overrightarrow{OP} = s(1, -\sqrt{3})$ $(t, s \in \mathbb{R})$ respectivamente. Las longitudes de dichos ejes son 8 y 2.

   a) Determine la ecuación canónica de la elipse en el sistema rotado $x' - y'$.

   b) Determine la ecuación de la elipse en el sistema $x - y$.

2. Sean $\vec{a}, \vec{b}$ vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^3$. Pruebe que el área del paralelógramo formado por los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b} + \lambda\vec{a}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, es igual al área formado por los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

3. Sean $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vectores no nulos de $\mathbb{R}^3$, tales que $\angle(\vec{a}, \vec{c}) = \angle(\vec{b}, \vec{c})$. Pruebe que $\vec{c}$ es ortogonal al vector

$$\vec{x} = \|\vec{b}\|\vec{a} - \|\vec{a}\|\vec{b}$$

4. Sea la recta de ecuación $L : \dfrac{x+5}{2} = \dfrac{y-2}{4} = \dfrac{z-4}{2}$

   a) Determine la ecuación del plano M_1 que contiene a L y al punto $P_0 = (-3, 2, 3)$.

   b) Encuentre el punto de intersección de L con el plano $M_2 : 3x + y + z = 3$.

   c) Encuentre una base para el espacio vectorial

$$M_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - 3y + 4z = 0\}$$

4. Tercer Certamen Álgebra II - Ejecución 06/12/88

1. Una hipérbola tiene un foco en $(2+\sqrt{10},-2)$ y las asíntotas son $-3x+y+8=0; 3x+y-4=0$. Encuentre la ecuación de la hipérbola.

2. Considere los subespacios vectoriales

$$\begin{aligned} M &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x+y-z=0\} \\ N &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -x+2y+2z=0\} \end{aligned}$$

   Encuentre $M \cap N$ y calcule $\dim(M \cap N)$.

3. Sean $\vec{u} = \vec{\imath} - \vec{k}$, $\vec{v} = \vec{\jmath} + \vec{k}$

   a) Calcule:

      1) $proy_{\vec{u}}(\vec{v})$.

      2) un vector de norma $\sqrt{2}$ que sea perpendicular a $\vec{u} \times \vec{v}$.

      3) el ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

   b) ¿$(1,1,2)$ pertenece al subespacio vectorial generado por $\vec{u}$ y por $\vec{v}$?

4. Resolver la ecuación $z^4 + |z| = 0$.

5. *a*) Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 8 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Sabiendo que A tiene inversa, obtenga A^{-1} usando operaciones elementales.

   b) Demuestre que si B es una matriz de orden 2 que conmuta con toda matriz A (de orden 2), entonces B es de la forma $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$, para algún $k \in \mathbb{R}$.

6. Usando el método de la matriz ampliada, determine los valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ tales que el sistema

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} \frac{1}{2}x & + & y & + & \frac{1}{2}z & = & 2 \\ 4x & + & y & + & 4z & = & 5 \\ 3x & - & y & + & \frac{\lambda}{2}z & = & 1 \end{array}\right\}$$

   tenga

   a) infinitas soluciones.

   b) solución única.

   c) solución vacía.

5. Tercer Certamen Álgebra Elemental II - Ejecución 28/11/86

1. *a*) Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Calcular $\frac{1}{2}\left\{X^t \cdot (A^t + A) \cdot X\right\}$.

   b) Dadas las matrices $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Calcular $(B \cdot C)^{-1}$.

   c) Sea $D = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -2 & 8 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Calcular rango$(D)$.

   d) Sea $E = \begin{pmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{pmatrix}$ y $F = \begin{pmatrix} -2a & -2b & -2c \\ x+2u & y+2v & z+2w \\ 5x & 5y & 5z \end{pmatrix}$. Calcular $\det(P)$, sabiendo que $\det(E) = \alpha$.

2. *a*) Determine $\lambda \in \mathbb{R}$ (si existe) para que el sistema:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 3 \\ 3x & + & 4y & - & 2z & = & 2 \\ 2x & + & 3y & + & \lambda z & = & 1 \\ \hline \end{array}$$

   tenga:

   1) solución única y encuéntrela.
   2) infinitas soluciones y encuéntrelas.
   3) no tenga solución.

   b) Determine todos los valores de x reales, para que la matriz

$$G = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2x \\ 3 & 1 & x-2 \end{pmatrix}$$

   1) sea invertible.
   2) encuentre A^{-1} para $x = 2$ por dos métodos diferentes.

6. Segundo Certamen Álgebra II - Ejecución 25/10/86

1. Considere en $\mathbb{R}^3$ los vectores $\vec{u} = (1, -1, 2)$ y $\vec{v} = (3, 0, -1)$. Calcule:

   a) el producto interno o producto punto de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

   b) el producto vectorial $\vec{u} \times \vec{v}$.

   c) la proyección ortogonal de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$.

   d) un vector $\vec{w}$ de norma 5 perpendicular a $\vec{u} \times \vec{v}$.

2. Considere $w \in \mathbb{C}$, $w = \dfrac{3+5i}{7i+1}$

   a) exprese w en la forma $a + bi$.

   b) exprese w como par ordenado.

   c) exprese w en forma polar.

   d) exprese w en forma exponencial.

   e) calcule $z \in \mathbb{C}$ tal que $w \cdot \overline{z} = i$.

   f) calcule las raíces cuadradas de $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\, i$.

3. *a*) Dados $P = (1, -1, 1)$ y $Q = (2, 3, 1)$ encuentre la ecuación paramétrica de la recta L que pasa por P y Q.

   b) Encuentre la ecuación del plano π qur pasa por el punto $R = (0, 0, 1)$ y contiene a la recta L anterior.

4. Calcule usando vectores y números complejos el área de un pentágono regular (5-ágono regular) inscrito en una circunferencia de radio 1.

5. Una partícula parte desde el punto $(1, -1, 2)$ con una rapidez constante de $2\sqrt{3}$[unidades] y dirección: $\vec{\imath} - \vec{\jmath} + \vec{k}$.

   a) ¿qué tiempo tarda en llegar al plano $\pi : x - 2y + z = 1$?

   b) si se mueve con la misma rapidez en dirección perpendicular a π, ¿en qué tiempo llegará al plano π?

7. Primer Certamen Álgebra II - Ejecución 10/10/85

1. Interprete geométricamente el conjunto de los números complejos z que satisfacen:

$$\operatorname{Re}(2z+1)+\operatorname{Im}(-\overline{z})=2\cdot\left|\frac{2+i}{1-i}\right|^2\cdot\left|(2-3i)^3\right|$$

2. Dados $\vec{a}=(1,3,1), \vec{b}=(2,1,0), \vec{c}=(0,1,3)$

   a) Demuestre que $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$ es un conjunto de vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^3$.

   b) Demuestre que $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$ genera $\mathbb{R}^3$.

   c) Como por *a*) y *b*) el conjutno $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$, encuentre las componentes o coordenadas de $\vec{v}=(3,2,1)$ en dicha base.

3. Dados los planos $P_1: 2x+y-z+3=0$ y $P_2: x-y+2z+1=0$

   a) Encuentre un vector director para la recta L_1 de intersección de ambos planos.

   b) Encuentre el coseno del ángulo que forma L_1 con una recta normal al plano $P_3:_x+y+z=1$.

4. *a*) Encuentre la ecuación del plano P determinado por las rectas L_1 y L_2 de ecuaciones:
   $L_1: \dfrac{x+1}{4}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z+5}{2}$; $L_2: \dfrac{x-3}{5}=\dfrac{y+1}{6}=z+3.$

   b) Encuentre $P_0=(x_0,y_0,z_0)$ punto de intersección de la recta $L_3: x=1+3t; y=2-t; z=3+2t$ con el plano P determinado en *a*).

8. Primer Certamen Álgebra II - Civil 02/10/85

1. *a*) Sea $\vec{a} = (1, -1, 2)$ y $\vec{p} = (2, \beta, 1)$ ¿Existe β tal que la proyección de $\vec{p}$ a lo largo de $\vec{a}$ $proy_{\vec{a}}(\vec{p})$ sea igual a $\vec{a}$?

   b) Si $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ y $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = \vec{0}$, demuestre que $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{b}\times\vec{c} = \vec{c}\times\vec{a}$, además de una interpretación geométrica de la igualdad $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{b} \times \vec{c}| = |\vec{c} \times \vec{a}|$.

2. Sea $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : y + z + t = 0\}$

   a) Demuestre que E es un espacio vectorial de $\mathbb{R}^4$.

   b) Encuentre una base de E y determine su dimensión.

3. En $\mathbb{R}^3$ un punto se mueve describiendo la recta paramétrica $L : x = 1 - t; y = 2 - 3t, z = 2t - 1$.

   a) Encuentre un vector $\vec{v}$ paralelo a la recta L.

   b) Si se considera el plano P_1 con ecuación cartesiana $2x + 3y + 2z + 1 = 0$. ¿En qué instante t corta la recta L al plano P_1? Determine el punto de intersección.

   c) Encuentre la ecuación de un plano P_2 paralelo a P_1 y tal que la recta L inicida en P_2 en el instante $t = 3$.

   d) Encuentre la ecuación de un plano P_3 paralelo a la recta L que pase por el punto $q = (1, 1, 1)$ ¿Es único el plano P_3?

   e) Dados los planos $P_4 : \frac{1}{15}x + \frac{1}{10}y + \frac{1}{15}z + 1 = 0$ y $P_5 : \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{2}z - 1 = 0$ determine la distancia mínima del plano P_1 a los planos P_4 y P_5.

9. Primer Certamen Álgebra II (Ejecución) 11/10/84

1. Dados los vectores $\vec{a} = 3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - \vec{k}$, $\vec{b} = -2\vec{\imath} + \vec{\jmath} + 3\vec{k}$ y $\vec{c} = 2\vec{\imath} + 6\vec{\jmath} + 4\vec{k}$.

   a) Determine si $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ son linealmente dependientes o independientes. Justifique su respuesta.

   b) Calcule $\|2\vec{a} - 3proy_{\vec{c}}(\vec{b})\|$ ($proy_{\vec{c}}(\vec{b})$= vector componente de $\vec{b}$ en la dirección de $\vec{c}$).

   c) Determine un vector unitario perpendicular a $\vec{a}$ y a $\vec{b}$.

   d) Calcule el ángulo entre $\vec{a}$ y $(\vec{b} + \vec{c})$.

   e) ¿Pertenece el vector $7\vec{\jmath} - 7\vec{k}$ al espacio generado por $\vec{a}$ y $\vec{b}$? Justifique su respuesta.

2. Dados los puntos $A = (1, 3, 2), B = (2, 1, 0), C = (-1, 4, -7)$. Encuentre:

   a) La ecuación del plano que pasa por A, B y C.

   b) La ecuación de una recta que pase por C y sea perpendicular a $\overrightarrow{AB}$.

3. Dada la recta L de ecuaciones $\left\{ \begin{array}{l} 2x + 2y - 3z = 6 \\ 2x - z = 1 \end{array} \right.$ y $P = (1/2, 1/2, \lambda)$. Encuentre λ para que la distancia de P a L sea 1.

10. Segundo Certamen Álgebra II (Civil) 19/11/84

1. Sean $\vec{F_1}$ y $\vec{F_2}$ dos fuerzas tales que: la magnitud de $\vec{F_2}$ es $2\sqrt{17}$, el ángulo formado por $\vec{F_1}$ y $\vec{F_2}$ es $\pi/3$ y el vector $\vec{F_1} - \vec{F_2}$ es perpendicular a $\vec{F_2}$. Determine la magnitud de la fuerza $\vec{F_1}$.

2. *a*) Encontrar todos los valores de $t \in \mathbb{R}$ de modo que el conjunto $B = \{(1,1,8),(t,2,-t),(1,0,1)\}$ sea una base para $\mathbb{R}^3$

   b) Encuentre las coordenadas de $(2,3,-1)$ respecto a la base $\{(1,1,8),(0,2,0),(1,0,1)\}$.

3. Dada la recta $x = \frac{y-4}{4} = \frac{z-6}{2}$ que incide en el plano $P_1 : x + 3y + 4z + 6 = 0$, determine las ecuaciones de los planos que se ubican a una distancia $2\sqrt{3}$ del punto de incidencia de tal forma que sean paralelos a la recta y perpendiculares al plano P_1.

4. *a*) Encontrar todos los complejos z (escritos en forma polar) que resuelven la ecuación: $a^2 - \sqrt{2} - \sqrt{2i} = 0$

   b) Graficar el conjunto de los $z \in \mathbb{C}$ tales que $|z - 2 - i| = |z - 1 + i|$.

11. Tercer Certamen Álgebra II (Civil) 19/12/83

1. *a*) Determinar el (los) valor(es) de $n \in \mathbb{Z}^+$ tal(es) que $z = \sqrt[3]{(3+i\sqrt{3})^n}$ sea un número real.

   b) Encuentre los otros 4 vértices de un pentágono regular inscrito en una circunferencia centrada en $(0,0)$ y que tiene un vértice en $A = (1/2, \sqrt{3}/2)$.

2. Determine X (matriz) tal que $(A^{-1} \cdot X \cdot A)^{-1} = A^2$, donde $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{ccccccccc|} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & y_1 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & + & x_4 & = & y_2 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & + & 5x_4 & = & y_3 \\ \hline \end{array}$$

   a) para qué valores de $y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$ el sistema tiene solución?

   b) para qué valores de $y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$ el sistema no tiene solución?

   c) resuelva el sistema para $y_1 = y_2 = y_3 = 1$.

4. Determinar los valores de x e y (si existen) para que el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x-2 & 2 \\ 0 & y-1 & x+2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ sea:

   a) 4.

   b) 3.

   c) 2.

   d) 1.

5. Sin usar la expansión de Laplace (ni en particula la regla nemotécnica para determinantes de matrices de 3×3) demuestre usando sólo propiedades

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{para todo } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

12. Segundo Certamen Álgebra II (Civil) 08/11/83

1. Considere los vectores $\vec{v_1} = (1, -1, 2)$, $\vec{v_2} = (-1, 2, 1)$ y $\vec{v_3} = (2, -3, 1)$ en $\mathbb{R}^3$.

   a) Determine si los vectores $\vec{a} = \vec{v_1} - \vec{v_2}$, $\vec{b} = \vec{v_1} \times \vec{v_2}$ y $\vec{c} = \vec{v_2} - \|\vec{v_2}\|^2 proy_{\vec{v_2}}(\vec{v_3})$ son linealmente independientes en $\mathbb{R}^3$.

   b) En caso afirmativo, encuentre las coordenadas del vector $\vec{v_2}$ respecto de los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$.

2. *a*) Encuentre las componentes de un vector de norma 2 en $\mathbb{R}^2$ que forme un ángulo de $30°$ con el eje OX.

   b) Una partícula P se mueve en el espacio con trayectoria rectilínea, de modo que en el instante t: $\overrightarrow{OP} = (1+t)\vec{\imath} + (1-t)\vec{\jmath} + (3t+2)\vec{k}$. Encuentre la ecuación del plano perpendicular a la recta (que determina la trayectoria de P) y tal que P incida en dicho plano en el instante $t = 3$.

3. Dados los planos $\pi_1 : x - 2y + z - 2 = 0$ y $\pi_2 : 2x + y - z + 1 = 0$, encuentre la ecuación cartesiana de una recta que sea perpendicular a la recta que determina $\pi_1 \cap \pi_2$.

4. Encuentre el lugar geométrico determinado por la condición $x \in \mathbb{C} - \{0\}$ tal que $\left|\dfrac{z-a}{z}\right| = K$ con $a \in \mathbb{R}$ y $K > 1$. ¿Qué sucede con este lugar geométrico cuando $K \to +\infty$?

5. Dados el plano $\vec{A} \cdot (\vec{x} - \vec{x_0}) = 0$ y el punto P en $\mathbb{R}^3$ (ambos), demuestre que el punto P' simétrico de P respecto de dicho plano (esto es, P' es el punto que se encuentra en la recta que pasa por P, perpendicular al plano, y tal que la distancia de P' al plano es igual a la distancia desde P a dicho plano) está dado por:
$$P' = P - 2\,\frac{(P - x_0) \cdot \vec{A}}{\|\vec{A}\|^2}\,\vec{A}$$

13. Segundo Certamen Álgebra II (Civil) 27/10/86

1. *a*) Considere los vectores $\vec{a} = (1, 2, 3)$ y $\vec{b} = (3, 2, 1)$ en $\mathbb{R}^3$, determine un vector $\vec{c} \in \mathbb{R}^3$ tal que el conjunto $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ sea una base de $\mathbb{R}^3$.

   b) Encuentre una base para el subespacio vectorial W de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores $(2, 2, 2)$, $(2, 4, 6)$, $(9, 6, 3)$.

   c) Sea V el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores $\vec{a} = (1, 1, 0)$ y $\vec{b} = (1, 2, 2)$. Determine un vector $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^3$ de norma igual a 3 que sea perpendicular a cada vector de la base de V. ¿Es $\vec{v}$ perpendicular a todo vector de V?. Justifique su respuesta.

   d) Considere el vector $\vec{u} = (2, 0, \lambda)$ de $\mathbb{R}^3$, ¿para qué valores de $\lambda \in \mathbb{R}$, $\vec{u}$ pertenece al subespacio vectorial V dado en 1*c*)?. Justifique su respuesta.

2. Encuentre la ecuación paramétrica de la recta L que pase por $P = (1, -1, 1)$ y tiene dirección paralela a la intersección de los planos π_1 y π_2, donde $\pi_1 : x + y + z = 1$ y $\pi_2 : 3x - 2y + z = 3$.

3. *a*) Encuentre la distancia del origen al punto de interesección del plano π con la recta L, donde: $\pi : 3x - 2y + z = 0$ y $L : \vec{x} = (1 + t, 2t - 1, 1 + 3t)$, $t \in \mathbb{R}$.

   b) Determine el ángulo que forma la recta L y un vector normal al plano π.

14. Segundo Certamen Álgebra Elemental II - Civil 22/11/89

1. *a*) Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que $T(2,0) = (4,8,0)$ y $T(1,2) = (2,-2,2)$. Determine la matriz asociada a T con respecto a las bases canónicas en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

   b) Si $A \in M(2,\mathbb{R})$ y $A^3 = 0$, demostrar que $\det(I_2 - A) \neq 0$ y $\det(I_2 + A + A^2) \neq 0$.

2. Resolver la ecuación matricial

$$(AXA)^{-1} = BA^{-1}$$

   donde

$$A \begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = A^t$$

3. Determinar condiciones sobre $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ para que el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x + y + \alpha z &= 1 \\ x + y + \beta z &= 1 \\ \alpha x + \beta y + z &= 1 \end{aligned}$$

   a) tenga solución única.

   b) tenga infinitas soluciones

   c) no tenga solución.

4. Considere la transformación $\phi : \mathbb{C} \setminus \{-i\} \to \mathbb{C}$ definida por $\phi(z) = \frac{z-i}{z+i}$

   a) Determine todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que $\phi(z) = z$

   b) Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que $z = \overline{z}$. Calcule $|\phi(z)|$.

   c) Demuestre que si $z \in \mathbb{C}$ y $[\phi(z)]^4 + [\phi(z)]^3 + [\phi(z)]^2 + [\phi(z)] + 1 = 0$, entonces $z \in \mathbb{R}$.

15. Álgebra II - Civiles - Certamen N°1 de Recuperación 22/11/89

1. Sea $W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 | x - 3y + 4z - w = 0\}$

   a) Demostrar que W es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$.

   b) Determinar una base de W.

2. Determinar la ecuación de plano que contiene los puntos $A = (1, 2, 1)$, $B = (0, 1, 1)$ y es paralelo a la recta que une los puntos $C = (1, 1, 1)$, $D = (1, 1, 0)$.

3. Sean los planos

$$\begin{aligned} \pi_1 &: \langle (1,1,2), (1,0,1) \rangle \\ \pi_2 &: x + y - z = 1 \\ \pi_3 & \quad \text{contiene a la recta } \frac{x}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{1} \text{ y el punto } (0,0,1). \end{aligned}$$

   Calcular $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$.

4. Determinar $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$ tal que:

$$\vec{w} \perp \langle (1, 2, -3), (2, -1, 3) \rangle \qquad \text{y} \qquad \|\vec{w}\| = 1$$

16. Álgebra II - Civiles - Certamen N°1 de Recuperación 22/11/89

1. Determinar la región del plano complejo definido por

$$1 < |z + 2i| \leq 2.$$

2. Sean $z = e^{i\theta}$, $w = re^{i\varphi}$. Demuestre o refute

$$\frac{z+w}{z-w} = \frac{1 - r^2 + 2ri\,\mathrm{sen}(\varphi - \theta)}{1 + r^2 - 2r\cos(\varphi - \theta)}\,.$$

3. Considere el anillo de la figura

   Describa cómo se transforma bajo la transformación $T(z) = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i\right) z$.

4. Sean los puntos $A = (1, 1, 1)$, $B = (-2, 1, 3)$ y $C = (\lambda, -1, 0)$. Determinar el valor de λ, tal que el plano que contiene los tres puntos, no intersecte el eje y de coordenadas.

17. Tercer Certamen Álgebra I - Civil 04/12/90

1. Si en el país de Tra-la-la, durante 14 años, "Evaldo" un hombre malo induce a un solo hombre por año a abandonar la senda de la virtud, y cada uno de estos pobres infelices seduce por su parte a un solo individuo por año.

   ¿Cuál es el número de Tralalianos extraviados después de 14 años?

2. Demuestre que si $|x-4|<2$, entonces $\dfrac{|x+2|}{|x|}<5$.

3. Sea
$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R}\setminus\{1,-2\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \dfrac{x^2-1}{x^2+x-2} \end{array}$$

   a) Demuestre que f es una función inyectiva.

   b) Demuestre que f es una función epiyectiva.

4. En una fiesta sansana, asisten 4 parejas de estudiantes invitados por una pareja de dueños de casa. A la hora de la cena, se sentaron alrededor de una mesa que tenía 10 lugares. ¿De cuántas maneras se pueden sentar?

   a) Los 10 estudiantes.

   b) Si cada pareja debe sentarse junta.

   c) Si cada pareja debe sentarse junta y el caballero al lado izquierdo de la dama.

   d) Si la pareja de dueños de casa debe ocupar uno de los puestos de cabecera.

   e) Si la pareja de dueños de casa debe ocupar uno de los puestos de cabecera y el resto sentarse con su pareja.

   f) Si la mesa es circular.

18. Segundo Certamen Álgebra I - Civil 27/11/90

1. Sean

$$\begin{array}{rcll} f & : & A & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & x^4+2x^2+1 \end{array} \qquad \begin{array}{rcll} g & : & B & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \sqrt{x+1} \end{array}$$

   a) Determine geométricamente el máximo dominio y recorrido para que f y g sean biyectivas.

   b) Demuestre analíticamente la inyectividad de la función f redefinida.

   c) Encuentre $f \circ g^{-1}$ donde existe (considerando la función f como la obtenida en a)).

2. *a*) Determine las posibles soluciones para $n \in \mathbb{N}$ que satisfagan la ecuación

$$1+\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^{1-i}} = 2^{n^2+2n-6}$$

   b) Calcule

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{1}{k}\right)$$

3. Demuestre usando inducción

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 2^i = 2^{n+1}(n^2-2n+3)-6 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

4. Sea $p(x) = x^4+ax^3+(1-1)x+a+1$. Si $a \in (-\infty,-1)$, verifique que $p(x)$ posee exactamente una raíz en el intervalo $(a,0)$.

19. I Certamen de Álgebra Elemental II - Civil 06/09/88

1. Demostrar que la ecuación de una parábola con directriz $x + y = 0$ y foco (a, a) es

$$(x - y)^2 - 4a(x + y) + 4a^2 = 0$$

2. El techo de un pasillo de 6[m] de ancho tiene la forma de una semi-elipse. Si la altura máxima del pasillo es de 5[m] y la altura de las paredes es de 4[m], encontrar la altura del techo a 1[m] de cualquier pared.

3. Una cuerda focal de una cónica está dividida en dos segmentos por el foco. Demostrar que la suma de los recíprocos de las longitudes de los dos segmentos es la misma, sin importar cuál cuerda se toma. (Sugerencia: use coordenadas polares).

4. Dada la ecuación

$$9x^2 - 6xy + 17y^2 + 24\sqrt{10}x + 56\sqrt{10}y = 208$$

   a) Encuentre la ecuación canónica del L.G. que representa.

   b) Encontrar la ecuación de una directriz en el sistema $x - y$.

   c) Grafique la curva en el sistema $x - y$

20. Primer Certamen Acumulativo de Álgebra II - Ejecución 08/09/88

1. Una hipérbola con focos en $(0,0)$ y $(6,0)$ tiene excentricidad $e = 3/2$, encuentre la ecuación de la hipérbola y de sus asíntotas. Represente la hipérbola con sus asíntotas en el sistema $x - y$.

2. Transforme la cónica a su forma más simple y represente la figura en el sistema de coordenadas: $X'' - Y''$.
$$3x^2 + 2xy + 3y^2 - \sqrt{2}x = 0$$

3. Una parábola tiene su vértice $V = (1,1)$ y su foco $F(2,2)$ en el sistema $x - y$ de coordenadas. Represéntela en el sistema $X - Y$. Encuentre su ecuación en el sistema $X - Y$.

4. $ABCD$ paralelógramo, M divide a $\overline{AB}$ en la razón 4:1

   Encuentre $\overline{DX} : \overline{XM}$.

21. Primer Certamen Parcial de Álgebra II - Ejecución 06/09/88

1. Dado $P = (3, 5)$ en el sistema $X - Y$, encuentre coordenadas de P en el sistema $X' - Y'$, si el origen de $X' - Y'$ es el punto $(2, -1)$ en el sistema $X - Y$ y además los ejes X' e Y' forman un ángulo de $45°$ con los ejes X e Y respectivamente.

2. Dada la cónica
$$u^2 - 5v^2 - 8\sqrt{2}u - 12 = 0$$
en el sistema de coordenadas $U - V$ que forma un ángulo $\theta = 45°$ con el sistema de coordenadas $X - Y$.

   a) Encontrar la ecuación canónica en un nuevo sistema $U' - V'$, del L.G. e identficar la figura.

   b) Encontrar excentricidad, focos, vértices y directrices en los ejes coordenados $(U' - V')$.

   c) Encontrar la ecuación en el antiguo sistema de coordenadas $X - Y$.

   d) Entregar la ecuación de las directrices en el sistema $X - Y$.

   e) Graficar aproximadamente en el sistema $X - Y$.

22. Tercer Certamen Álgebra II - Civil 06/12/88

1. Determinar para qué valores de k y λ el sistema:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 4 \\ 2x & - & y & + & kz & = & 2 \\ 4x & + & 3y & + & 5z & = & 3\lambda \end{array}\right|$$

   a) No tiene solución.

   b) Tiene infinitas soluciones.

   c) Tiene solución única.

2. *a*) Sea la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & x & 3 \\ x & 1 & -1 \\ 2 & 3 & x \end{bmatrix}$. Determinar $x \in \mathbb{R}$ tal que

$$\det(A^t) + \det(A) = 16x.$$

   b) Sea $B \in M(\mathbb{C}, 3)$ tal que

$$\det(5B) - 5\det(B^{-1}) = \det(I_3)$$

   Calcular $\det(B)$.

3. *a*) Sea $z = \dfrac{(1+i)^3 \mathrm{Cis}(4\pi/3)}{(-2+2i)^3}$. Calcular las raíces cúbicas de z^2.

   b) Represente geométricamente los conjuntos

$$A = \{z \in \mathbb{C} : |z| = |z-1|\} \qquad \text{y} \qquad B = \{z \in \mathbb{C} : |z+1| + |1-z| = 4\}$$

4. Sea $A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0$, con A, B,C y D constantes reales, la ecuación de una circunferencia en el plano real $x - y$.

   a) Exprese esta ecuación en términos de z y $\overline{z}$ en el plano complejo.

   b) Determine la naturaleza (número real o número complejo) de los coeficientes de la ecuación encontrada en *a*).

23. Primer Certamen Álgebra Elemental II - Ejecución 23/09/87

1. Demuestre por inducción sobre n, que
$$4n^2 + 1 \geq 2n \qquad \forall n \geq 0.$$

2. El doble del tercer término sumado al triple del quinto término de una progresión aritmética da 17 y si el octavo término es 11 ¿cuál es la progresión?

3. Determine si existe un entero positivo n de modo que en el desarrollo de $(1+2x)^n$ el término quinto y el término tercero cumplen $t_5 = 2(t_3)^2$.

4. Si $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 \cdot a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$, calcule entonces $\displaystyle\prod_{k=31}^{100} 7^{k/3-1}$

5. Encuentre un vector de norma 3 y que tenga la dirección de $\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}$, donde $\vec{a} = (1,2,1)$ y $\vec{b} = (3,-6,-9)$.

24. Tercer Certamen Álgebra II 02/12/87

1. Resuelva la siguiente ecuación en los complejos

$$z^6 - 2z^3 + 4 = 0.$$

2. Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Calcule $A^{-1} + \frac{1}{4}(A^2 - 2A - 4I)$.

3. Determine todas las soluciones del sistema

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & y & + & 2z & = & 5 \\ -2x & + & 3y & - & 4z & = & 10 \\ 7x & + & 6y & + & 2z & = 25 & \end{array}\right|$$

   que satisfacen la condición adicional $xyz = 0$.

4. Calcule

$$\det \begin{bmatrix} a & b & c & d & e \\ a & -b & c & d & e \\ a & b & -c & d & e \\ a & b & c & -d & e \\ a & b & c & d & -e \end{bmatrix}.$$

25. Primer Certamen Álgebra II - Civil 23/09/87

1. Calcular $\sum_{k=1}^{n}[(k-1)^3 + 3^{k+1} - k^3]$

2. Para qué valor de x, la suma de los términos tercero y quinto en el desarrollo de
$$\left(\sqrt{2^x} + \frac{1}{2^{x-1}}\right)^m$$
es igual a 120, sabiendo que la suma de los coeficientes binomiales de los tres últimos términos es igual a 22.

3. *a*) Determine qué relación debe existir entre a y b para que el vector $(a+b, 3a+2b, a)$ pertenezca al subespacio generado por los vectores $(1,1,0)$ y $(1,0,2)$.

   b) Sea $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + z = 0\}$. Demuestre que V es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

4. Sean $\vec{u_1} = (2,\lambda,1)$; $\vec{u_2} = (1,-\lambda,0)$ y $\vec{u_3} = (\lambda,1,\lambda)$. Determinar para qué $\lambda \in \mathbb{R}$, $\{\vec{u_1},\vec{u_2},\vec{u_3}\}$ es base de $\mathbb{R}^3$.

26. Tercer Certamen de Álgebra II - Ejecución 30/11/87

1. Resolver la ecuación
$$iz^{4/3} + 1 = 0; \qquad z \in \mathbb{C}$$

2. Encontrar usando solamente operaciones de matrices elementales por filas, la matriz inversa de
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1+i \end{pmatrix}$$

3. Dado el sistema de ecuaciones lineales
$$\left.\begin{array}{rcc} ay + z & = & b \\ ax + bz & = & 1 \\ a(x+y) & = & -2(1+z) \end{array}\right|$$

   Hallar $a, b \in \mathbb{R}$ de modo que

   a) El sistema tenga única solución (encuéntrela).

   b) El sistema no tenga solución.

   c) El sistema tenga infinitas soluciones (encuéntrelas).

4. Calcule usando propiedades el $\det(A)$, si $A = \begin{pmatrix} a & a & a & a+b \\ a & 2a & 2a & a+b \\ 0 & a & 2a & 1 \\ a & a & a & a+b+c \end{pmatrix}$.

27. I Certamen Álgebra Elemental II - Civil 08/09/86

1. Encontrar la ecuación de la elipse con ejes paralelos a los ejes coordenados, que pasa por los puntos $P = (-1, \frac{\sqrt{3}+2}{2})$ y $Q = (-\sqrt{3} - 2, \frac{1}{2})$ y tiene centro en el vértice de la parábola de ecuación $y^2 - 3x - 2y - 5 = 0$.

2. Dada la ecuación $3x^2 - 4xy + 8x - 1 = 0$.

   a) Encuentre la ecuación canónica del L.G. que representa.

   b) Grafique la curva.

   c) Determine las coordenadas de un focoy la ecuación de una directriz en el sistema $x - y$.

3. Determine el término central en el desarrollo de $\left(1 + \dfrac{2}{x^3}\right)^m$, sabiendo que el coeficiente numérico del quinto término es igual a 10 veces el coeficiente numérico del tercer término.

4. Tres personas A,B y C se reparten una herencia de 2.100 U.F. La cantidad que recibe cada una es proporcional a su edad. Las edades están en P.G. y se sabe que A es menor que B y B es menor que C. Si B tiene 6 años y A recibe 300 U.F. ¿cuánto recibe cada una y qué edades tienen?

5. En los conjuntos se define una operación asociativa denotada $*$, que satisface la propiedad siguiente: existe un conjunto B tal que $A * B = B * A$, $\forall$ conjunto A. Demostrar por inducción que $A^n * B = B * A^n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, donde $A^n = \underbrace{A * A * \ldots * A}_{n}$.

28. Tercer Certamen Álgebra II - Civil 03/12/86

1. Grafique la región R del plano complejo definida por $R = R_1 \cap R_2$, donde $R_1 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) \leq 1\}$ y $R_2 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = 1\}$.

2. Determine el conjunto solución del sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 6 & -1 & -5 \\ 7 & -3 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

justificando todos sus pasos.

3. *a*) Encuentre las raíces cúbicas de la unidad.

   b) Sea ω una raíz cúbica compleja de la unidad tal que $\operatorname{Im}(\omega) > 0$. Pruebe que

$$\det \begin{bmatrix} 1 & \omega & \omega^2 & \omega^3 \\ \omega & \omega^2 & \omega^3 & 1 \\ \omega^2 & \omega^3 & 1 & \omega \\ \omega^3 & 1 & \omega & \omega^2 \end{bmatrix} = 3i\sqrt{3}$$

4. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & -2 \\ 2 & 3 & \lambda \end{bmatrix}$

   a) ¿Para qué valores de $\lambda \in \mathbb{R}$, $\operatorname{rang}(A) = 2$?

   b) ¿Es invertible la matriz A con los valores de λ obtenidos anteriormente?

   c) Encuentre A^{-1} para $\lambda = 1$.

5. Sean A y B matrices tales que $\det A \neq 0$ y $AB = BA$

   a) Pruebe que $A^{-1}B = BA^{-1}$.

   b) Determine si B es una matriz invertible.

   Justifique su respuesta.

29. Examen de Compensación Álgebra Dos - Civil 09/12/86

1. Encuentre la ecuación canónica y dibuje su gráfica junto con los nuevos ejes de coordenadas para la cónica:
$$x^2 + \frac{3}{2}xy + \frac{9}{16}y^2 + \frac{15}{4}x - 5y + \frac{25}{4} = 0.$$

2. Encuentre la ecuación del plano paralelo a la recta $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z-3}{2}$ y que contiene a la recta intersección de los planos $x + y - 3 = 0$ y $2y + 3z - 4 = 0$.

3. Sea $A = \begin{bmatrix} \bar{i} & |1+i| & -1 \\ |i| & i & \sqrt{2} \\ 1/2 & -1 & -i \end{bmatrix}$. Calcule $\det(A)$ y $\det(A^{-1})$.

4. Dados los vectores $\vec{a} = 3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - \hat{k}$; $\vec{b} = -\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + \hat{k}$ y $\vec{c} = -5\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} + 3\hat{k}$.

   a) Determine si $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ es un conjunto l.i. o l.d.

   b) Calcular $\|3\vec{a} + 2proy_{\vec{c}}(\vec{b})\|$.

   c) Determine un vector de tamaño 3 perpendicular a $\vec{b}$ y $\vec{c}$.

30. I Certamen Álgebra II - Civil (Recuperación) 29/09/86

1. Encuentre la ecuación de la hipérbola con vértice en $(-2,1)$, asíntotas de ecuaciones $3x+y+3=0$ y $3x-y+9=0$.

2. Encontrar la ecuación de la elipse con centro en el origen, eje focal en la recta $y=x$ y que pasa por los puntos $(0,\frac{\sqrt{15}}{2})$ y $(-2,-\frac{1}{2})$.

3. Tres números cuya suma es igual a 93, constituyen una P.G. También se pueden considerar como el 1°, 2° y 7° términos de una P.A. Hallar estos números.

4. Calcular
$$S=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot 3^{n-k}\cdot(-2)^{k+1}\cdot 5^{n-k+5}\cdot(-7)^{k-1}.$$

5. Demostrar por inducción que $2^{3^n}>3^{2^n}$ $\forall n\in\mathbb{N}$, $n>1$.

31. Tercer Certamen Álgebra II - Civil 05/12/86

1. Sea $A(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

   a) Determine el (los) valor(es) para θ tales que $I_3 + A(\theta)$ no sea invertible.

   b) Compruebe que $(I_3 - A(\pi/2))(I_3 + A(\pi/2))^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Si $\left|\dfrac{z-i}{z+2i}\right| = \dfrac{1}{2}$, pruebe que $|z^2| = 4\mathrm{Im}(z)$.

3. Determine $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ tales que $z_1 + z_2 = 3 + 2i$, $\mathrm{Re}(z_1) = 2$ y $\dfrac{z_1}{z_2}$ sea un imaginario puro.

4. Determine si las siguientes afirmaciones son V o F. Demuestre en caso de ser V y de un contraejemplo en caso de ser F.

   a) $A(B + C) = A(B + D) \Longrightarrow C = D \;\forall A, B, C, D \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

   b) Si el sistema $AX = 0$ tiene soluciones no triviales, entonces A es invertible.

   c) Si $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \Longrightarrow A \overset{F}{\sim} \ldots \overset{F}{\sim} I_n \;\forall A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$.
   ($\overset{F}{\sim} \ldots \overset{F}{\sim}$ equivalente por filas).

5. Si $A^{-1} = \dfrac{adj(A)}{|A|}$ y $adj(A) = \begin{bmatrix} 10 & -7 & 1 \\ 7 & -5 & 1 \\ -16 & 11 & -2 \end{bmatrix}$. Determine A.

32. Segundo Certamen Álgebra Elemental I - Ejecución 28/05/86

1. Se tienen 3 barriles A, B y C, con mezcla diferente de pisco P_1, P_2 y P_3.

   - En el barril A están en la razón $1 : 2 : 3$.
   - En el barril B están en la razón $3 : 5 : 7$.
   - En el barril C están en la razón $3 : 7 : 9$.

   ¿Qué cantidad de litros debe tomarse de cada barril para formar una mezcla de 17[l] de P_1, 35[l] de P_2 y 47[l] de P_3?

2. Encuentre x e y tales que

$$\left.\begin{array}{rcl} \sqrt{\dfrac{x+y}{xy}} + \sqrt{\dfrac{y-x}{xy}} & = & 7 \\[2ex] \dfrac{y^2-x^2}{x^2y^2} & = & 144 \end{array}\right|$$

3. Resolver en $\mathbb{R}$:

$$\frac{x^3-1}{(x-1)(x^2-x+1)(x^2-x-30)} \leq 0.$$

4. Resolver en $\mathbb{R}$ la siguiente igualdad:

$$|x+2| + |x^2+4x+4| = |x-1|.$$

33. Examen de Compensación Álgebra II - Ejecución 11/12/86

1. *a*) Sea $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y\}$.
   1) Verifique que U es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.
   2) Encuentre una base de U (justifique).
   3) ¿Cuál es la dimensión de U? (justifique).
   4) Exhiba un vector u_0 en U que tenga norma igual a 2; ¿cuántos hay?; y un vector v en $\mathbb{R}^3$ que sea ortogonal a u_0; ¿cuántos hay?

   b) Sea $z = (1, 1) \in \mathbb{C}$.
   1) Escriba z en las formas $a + bi$ y exponencial.
   2) Calcule z^{20}.
   3) Calcule las raíces cúbicas de z.

   c) 1) Sea $A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix}$. Encuentre todos los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales A^{-1} existe, y calcule A^{-1} en esos casos.
   2) Muestre con un ejemplo que puede tenerse $\det(B + C) \neq \det(B) + \det(C)$.
   3) Calcule el rango de D si $D = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 6 \end{pmatrix}$.

2. *a*) $L : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = z$. $L' : x = 1 + t,\ y = 2 + 2t,\ z = -t$.
   1) Encuentre el plano π que contiene a L y L'.
   2) Encuentre una recta L'' perpendicular a L y que intersecte a L.

   b) Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ \lambda & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $Y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
   1) Encuentre todos los valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ tales que la ecuación matricial $(A - B)X = Y_0$ tenga solución única.
   2) Encuentre todos los valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ tales que la ecuación matricial $ABX = Y_0$ tenga solución única.
   3) Encuentre todos los valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ tales que la ecuación matricial $(A + B^t)X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ tenga infinitas soluciones.

34. Certamen N°2 Álgebra 2 - Civiles 24/10/85

1. Demuestre por inducción que

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n-1}{n} \,, \quad \forall n \in \mathbb{N} \,, \quad n \geq 2.$$

2. Determine qué condición debe satisfacer n para que en el desarrollo de $(x^9 - x^{-3})^n$ exista el término independiente de x.

3. *a*) Calcule la parte real e imaginaria de

$$w = (1 + \sqrt{3}i)^{12} + (1 - \sqrt{3}i)^{12}$$

   b) Si $z, w \in \mathbb{C}$, demuestre que: $(z\overline{w} + \overline{z}w) \in \mathbb{R}$.

4. Resolver la ecuación $(\sqrt{3} + i)z^3 + 8 + 8\sqrt{3}i = 0$.

5. Dado un triángulo equilátero ABC de lado a, un nuevo triángulo equilátero $A'B'C'$ se forma uniendo los puntos medios de los lados del triángulo ABC. Este procedimiento se repite indefinidamente.

   Calcule la suma de las áreas de los triángulos así formados.

35. Examen de Compensación Álgebra II - Ejecución 20/03/85

1. Encuentre las raíces cuartas del número $\dfrac{8\sqrt{2}+8\sqrt{2}i}{\frac{384}{\sqrt{3}}-128i}$

2. Hallar la ecuación del plano P que pasa por los puntos $A=(0,0,0)$, $B=(1,2,3)$ y es paralelo a la recta L intersección de los planos

$$P_1 : 2x+3y-z=5 \qquad ; \qquad P_2 : x+y+z=1.$$

3. Determinar a para que el sistema:

$$\left.\begin{array}{rcl} ax+y+z & = & 0 \\ 2x-2az & = & 0 \\ 3x+y+(a-2)z & = & 0 \end{array}\right|$$

tenga como única solución: $x=y=z=0$.

4. Si $\begin{vmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 8$, calcule el valor de la siguiente expresión usando sólo propiedades el determinante

$$\begin{vmatrix} b & a & c \\ \beta & \alpha & \gamma \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \\ 4 & 6 & 8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ a+\alpha & b+\beta & c+\gamma \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

5. Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ son vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^2$, verifique que $\vec{u}+\vec{v}$, $\vec{u}-\vec{v}$ son también linealmente independientes.

6. Determine la inversa de $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ usando sólo operaciones elementales.

36. Examen de Compensación Álgebra II - Ejecución 19/12/85

1. Encontrar una ecuación del plano que contenga los puntos $P = (2, 1, 1)$, $Q = (3, 5, 0)$, y que sea paralelo a la recta $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{3} = z$.

2. Resolver en $\mathbb{C}$ la ecuación $z^5 - (-1+i)^4 = 0$.

3. Encontrar la ecuación de la elipse de centro $(1, 2)$ con uno de los focos en $(6, 2)$ y que pasa por el punto $(4, 6)$.

4. Calcule el valor del determinante

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

5. Dado el sistema:

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & a \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & + & x_4 & = & b \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & + & 5x_4 & = & c \end{array}\right|$$

   a) ¿para qué valores de $a, b, c \in \mathbb{R}$ el sistema tiene solución?

   b) ¿para qué valores de $a, b, c \in \mathbb{R}$ el sistema no tiene solución?

   c) resuelva el sistema para $a = b = c = 1$.

37. Segundo Certamen Álgebra II - Ejecución 14/11/85

1. Escriba z de la forma $a+bi$, donde $z = \dfrac{5\ \mathrm{cis}(\pi/3)\cdot(-4+4i)^6}{12\cdot(-10i)\cdot(-2-2i)^4}$.

2. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Determine si A es invertible y, en caso afirmativo, calcule A^{-1}.

3. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

   a) Calcule $B = A^3 - 3A^2 + 4I$.

   b) Usando solamente la igualdad anterior, calcule A^{-1} (*Hint:* Despeje I de la igualdad en *a*)).

4. *a*) Determinar a y b tales que $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & b & a \end{pmatrix}$ tenga rango máximo.

   b) Sean A, B matrices, A^t la matriz transpuesta de A. Enuncie condiciones para que la matriz A^tBA sea simétrica (justifique).