Ayudantía N° 1 Mat-223

Omar Risco Pedraza

1er Semestre 2008

1 Conceptos Previos

1.1 Definicion

Sea D un subconjunto de un espacio vectorial real, una función $f : D \to R$ se dice *convexa* si

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

para todo $x, y \in D$ y $0 < t < 1$. Una función f se dice concava si $-f$ es convexa.

1.2 Teorema

Sea $f : D \to R$ una función concava. Entonces :

$$\sum_{i=1}^{n} t_i f(x_i) \leq f(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i)$$

Para $x_1, \ldots, x_n \in D$, $t_1, \ldots, t_n \in (0,1)$ y $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$

2 Desigualdad de Hölder y Cauchy-Schwarz

2.1 Teorema

Suponga $p, q > 1$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Luego para $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ números reales se tiene :

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

2.2 Demostración

- Usando el hecho de que $\log x$ es una función concava y usando el teorema 1.2 concluya que

$$\prod_{i=1}^{n} a_i^{p_i} \leq \sum_{i=1}^{n} p_i a_i$$

  para $a_1, \ldots, a_n \geq 0$ y $p_1, \ldots, p_n > 0$ con $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$
- Use el resultado anterior para concluir que dados a, b reales no negativos se tiene que $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$
- A partir de la desigualdad anterior demuestre el teorema
- Usando la Desigualdad de Hölder demuestre la Desigualdad de Cauchy-Schwarz

3 Desigualdad de Minkowki

3.1 Teorema

Suponga $1 \leq p \leq \infty$ y $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ números reales. Entonces :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

3.2 Demostración

- verifique la desigualdad para $p = 1$
- Suponga que $1 < p < \infty$ y que no todos los a_k y b_k son iguales a 0, utilice el conjugado de p,(llamese q) y note que :

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^p \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^{(p-1)}|a_k| + \sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^{(p-1)}|b_k|$$

- use el teorema 2.1 para concluir