Ayudantía N° 2 Mat-223

Omar Risco Pedraza

1er Semestre 2008

1. Conjuntos Abiertos, Cerrados y Compactos

- Pruebe:
$$\left|\int_a^b fg dx\right| \leq \left(\int_a^b |f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$
y
$$\left|\int_a^b (f+g) dx\right| \leq \left(\int_a^b |f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$
donde f, g son funciones reales integrables.

- Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado. Probar que para todo par $x, y \in V$ con $x \neq y$ existen dos abiertos disjuntos que los contienen.

- Dados dos conjuntos A, B en un espacio vectorial normado, demesutre que:

  1. $int(A \cap B) = int(A) \cap int(B)$
  2. $int(A) \cup int(B) \subset int(A \cup B)$
  3. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
  4. $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$

- Sea $A \subset E$ espacio vectorial normado, se definen
$$\alpha(A) = int(\overline{A}) \qquad \beta(A) = \overline{int(A)}$$

  1. Demuestre que si $A \subset B$, $\alpha(A) \subset \alpha(B)$ y $\beta(A) \subset \beta(B)$
  2. Demuestre que si A es abierto entonces $A \subset \alpha(A)$ y que si A es cerrado entonces $\beta(A) \subset A$

- Demuestre que la intersección de un conjunt cerrado con un compacto, es un conjunto compacto

- Demuestre que un subconjunto cerrado de un conjunto compacto es compacto

- Pruebe que si $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es una familia de conjuntos compactos en un espacio vectorial normado tal que $\cap_{i \in \mathbb{N}} A_i = \emptyset$ entonces existe un número finito de conjuntos de la familia: $A_{i_1}, \ldots, A_{i_n}$ con la propiedad $\cap_{j=1}^n A_{i_j} = \emptyset$