Ayudantía N° 3 Mat-223

Omar Risco Pedraza

1er Semestre 2008

1. Sucesiones de Cauchy

Definición 1.1 (Conjunto Completo) *Un subconjunto de un e.v.n. se dice completo si toda sucesión en el conjunto, que es de Cauchy, converge.*

- Sea $s_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + + \frac{1}{n!}$ con $n \in \mathbb{N}$
  1. Mostrar que $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{Q}$ bajo la norma de usual de $\mathbb{R}$
  2. Mostrar que para todo $q \in \mathbb{N}$ se tiene que $q!s_q \in \mathbb{Z}$ y $0 < q!(e - s_q) < 1$, donde $e = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$
  3. Deducir que e es irracional y que $\mathbb{Q}$ no es completo

- Considere el espacio vectorial normado $(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$, demuestre que la sucesión $\{f_k\}$ definida por

$$f_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ -2^k(x - \frac{1}{2}) + 1 & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2^k}] \\ 0 & \text{si } x \in [\frac{1}{2} + \frac{1}{2^k}, 1] \end{cases}$$

  es de Cauchy y no es convergente

* Considere el e.v.n. $(l_1, \|\cdot\|_1)$ de las sucesiones reales que cumplen con $\sum |x_k| < \infty$ y donde $\|\{x_k\}\|_1 = \sum |x_k|$. Demuestre que el conjunto $P = \{\{x_k\} \ : x_k \geq 0 \ \forall k \in \mathbb{N}\}$ tiene interior vacio

2. Conjuntos Compactos

- Pruebe que si $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una familia de conjuntos compactos en un espacio vectorial normado tal que $\cap_{i\in\mathbb{N}} A_i = \emptyset$ entonces existe un número finito de conjuntos de la familia: $A_{i_1}, \ldots, A_{i_n}$ con la propiedad $\cap_{j=1}^{n} A_{i_j} = \emptyset$

- Pruebe que si A es un conjunto compacto en un e.v.n. y si $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una familia de conjuntos abiertos tales que $\cup_{i\in\mathbb{N}} A_i \supset A$, entonces existe un número finito de conjuntos de la familia: $A_{i_1}, \ldots, A_{i_n}$ con la propiedad $\cup_{j=1}^{n} A_{i_j} \supset A$