UNIVERSIDAD TECNICA FEDERICO SANTA MARIA

Departamento de Matemática
Ingeniería Civil Matemática
Licenciatura en Matemática
2008

Certamen 1 Análisis I año 2008

Profesor: Pedro Gajardo
Ayudante: Omar Risco
Fecha: 18 de abril 2008

Pregunta 1

Sea $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio vectorial normado. Un conjunto $D \subseteq X$ se dice *denso* en X si su adherencia $\overline{D}$ es todo el espacio X.

1. Dado un conjunto $D \subseteq X$, muestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes:
   a) D es denso;
   b) Para todo $x \in X$ existe una sucesión $\{x_k\}_{k\in I\!N} \subset D$ tal que $x_k \to x$;
   c) Para todo conjunto abierto $\theta \subseteq X$ distinto de vacío se tiene $\theta \cap D \neq \emptyset$.
2. Considere $(Y, \|\cdot\|_Y)$ un espacio vectorial normado. Si $f : X \longrightarrow Y$ es una función continua y sobreyectiva, demuestre que para todo conjunto $D \subseteq X$ denso en X se tiene que $f(D) \subseteq Y$ es denso en Y.
3. Sean $f,\ g : X \longrightarrow Y$ dos funciones continuas y $D \subseteq X$ un conjunto denso en X. Muestre que si $f(x) = g(x)$ para todo $x \in D$ entonces $f \equiv g$.

Pregunta 2

Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado y $\{\theta_k\}_{k\in I\!N} \subseteq X$ una sucesión de conjuntos abiertos y densos en X.

1. Considere un conjunto abierto $\theta \subseteq X$ distinto de vacío. Muestre que existe $x_0 \in X$ y $\varepsilon_0 > 0$ tal que $\overline{B}(x_0, \varepsilon_0) \subseteq \theta_0 \cap \theta$.
2. Pruebe que existe $x_1 \in X$ y $\varepsilon_1 \in]0, 1]$ tal que
$$\overline{B}(x_1, \varepsilon_1) \subseteq B(x_0, \varepsilon_0) \cap \theta_1 \subseteq \theta_0 \cap \theta.$$
3. Justifique la existencia de una sucesión $\{x_k\}_{k\in I\!N} \subset X$ y $\varepsilon_k \in]0, 1/k]$ tal que
$$\overline{B}(x_k, \varepsilon_k) \subseteq B(x_{k-1}, \varepsilon_{k-1}) \cap \theta_k \subseteq B(x_{k-2}, \varepsilon_{k-2}) \cap \theta_{k-1} \subseteq \ldots \subseteq B(x_0, \varepsilon_0) \cap \theta_1 \subseteq \theta_0 \cap \theta.$$
4. Si X es un espacio vectorial normado de Banach, muestre que existe $x \in X$ tal que $x_k \to x$ y
$$x \in \theta \cap \left(\bigcap_{k\geq 0} \theta_k \right).$$
5. Concluya que si X es un espacio vectorial normado de Banach, entonces para toda sucesión de conjuntos abiertos densos en X se tiene que su intersección es densa en X.

Pregunta 3

Considere un espacio vectorial normado $(X, \|\cdot\|)$.

1. Si X es un espacio vectorial normado de Banach y $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset X$ una sucesión que satisface

$$\sum_{k\geq 0} \|x_k\| < +\infty \ ,$$

demuestre que la sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ definida por

$$y_n = \sum_{k=0}^{n} x_k \quad , \tag{*}$$

es convergente en X.

2. Pruebe que si para toda sucesión $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset X$ que satisface

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \|x_k\| < +\infty$$

se tiene que la sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida por (*) es convergente en X, entonces X es un espacio vectorial normado de Banach.

Indicación: Dada una sucesión de Cauchy, muestre que tiene un punto de acumulación.

Tiempo: 3 horas.