Departamento de Matemática
Ingeniería Civil Matemática
Licenciatura en Matemática
2008

UNIVERSIDAD TECNICA
FEDERICO SANTA MARIA

Certamen 2 Análisis I año 2008

Profesor: Pedro Gajardo
Ayudante: Omar Risco
Fecha: 5 de julio 2008

Pregunta 1

1. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado y $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable.

   a) Demuestre que f es una función convexa si y solamente si se tiene la relación
   $$f(x) + Df(x)(y - x) \leq f(y)$$
   para todo $x, y \ \in X$.

   b) Muestre que la función f es convexa si y solamente si
   $$[Df(x) - Df(y)](x - y) \geq 0$$
   para todo $x, y \ \in X$.

2. Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^2. Pruebe que f es convexa si y solamente si la matriz Hessiana en $x \in \mathbb{R}^n$, que denotaremos $H(x)$, es semidefinida positiva para todo $x \in \mathbb{R}^n$, es decir,
   $$\langle v, H(x)v \rangle \geq 0 \qquad \forall \ x, v \ \in \mathbb{R}^n,$$
   donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto interno usual de $\mathbb{R}^n$.

   Indicación: Para $x, y \ \in \mathbb{R}^n$ considere la función $\phi : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por
   $$\phi(t) = \langle \nabla f(x + t(y - x)), y - x \rangle.$$

Pregunta 2

1. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado, $C \subseteq X$ un conjunto convexo cerrado y $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función convexa y diferenciable. Considere el siguiente problema de optimización:
   $$\min_{x \in C} f(x). \tag{P}$$

   a) Muestre que $\bar{x} \in C$ es una solución del problema (P) si y solamente si
   $$Df(\bar{x})(x - \bar{x}) \geq 0$$
   para todo $x \in C$.

   b) Concluya que $f(\bar{x}) \leq f(x)$ para todo $x \in X$ si y solamente si $Df(\bar{x}) = 0 \ (\in X^*)$.

2. Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función convexa y diferenciable. Pruebe que $\bar{x} \in \mathbb{R}^n_+$ (cono de los vectores con componentes positivas en $\mathbb{R}^n$) es solución del problema

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n_+} f(x)$$

si y solamente si $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}) \geq 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$.

Pregunta 3

Sea X un espacio de Hilbert cuyo producto interno notaremos $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

1. Considere $T : X \longrightarrow X$ un operador que satisface las siguientes dos propiedades:

   - Existe $\alpha > 0$ tal que para todo $x,\ y \in X$ se tiene
   $$\langle T(x) - T(y), x - y \rangle \geq \alpha \|x - y\|^2;$$
   - Existe $L > 0$ tal que para todo $x,\ y \in X$
   $$\|T(x) - T(y)\| \leq L\|x - y\|.$$

   Muestre que para todo $\bar{y} \in X$ existe una única solución de la ecuación
   $$T(x) = \bar{y}.$$

   Indicación: Dado $\bar{y} \in X$, muestre que para un valor de $t > 0$ adecuado, el operador $F(x) = x - t(T(x) - \bar{y})$ es contractante.

2. Sea $a : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ una aplicación que satisface:

   - Para todo $x \in X$ la función $y \to a(x, y)$ es lineal y continua.
   - Existen dos constantes positivas α y L tales que
   $$\begin{array}{rcl} \alpha\|x - y\|^2 & \leq & a(x, x - y) - a(y, x - y) \\ |a(x, z) - a(y, z)| & \leq & L\|x - y\|\ \|z\|. \end{array}$$

   Dado un elemento $\bar{y} \in X$ demuestre que existe un único $\bar{x} \in X$ tal que
   $$a(\bar{x}, v) = \langle \bar{y}, v \rangle \qquad \forall\ v \in X.$$

Tiempo: 3 horas.