Departamento de Matemática
Ingeniería Civil Matemática
Licenciatura en Matemática
2008

UNIVERSIDAD TECNICA
FEDERICO SANTA MARIA

Certamen 3 Análisis I año 2008

Profesor: Pedro Gajardo
Ayudante: Omar Risco
Fecha: 8 de agosto 2008

Pregunta 1

Sea (X, d) un espacio métrico y A un conjunto no vacío de X. Considere la función $d_A : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ definida por

$$d_A(x) = \inf_{y \in A} d(x, y).$$

1. Pruebe que d_A es una función continua.
2. Demuestre que $x \in \overline{A}$ si, y solamente si, $d_A(x) = 0$.
3. Si A y B son dos conjuntos cerrados y no vacíos de X tales que $A \cap B = \emptyset$, muestre que existe una función continua $f : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ tal que
   - $f(x) = 0$ para todo $x \in A$;
   - $f(x) = 1$ para todo $x \in B$;
   - $f(x) \in]0, 1[$ para todo $x \in (A \cup B)^c$.

   Indicación: Considerar la función $f(x) = \dfrac{d_A(x)}{d_A(x) + d_B(x)}$.

Pregunta 2

Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico separado. Demuestre que:

1. Para todo $x \in X$, el conjunto $\{x\}$ es cerrado.
2. Si para $x \in X$ denotamos por $\mathcal{V}(x)$ el conjunto de todas las vecindades de x, entonces
$$\bigcap_{V \in \mathcal{V}(x)} V = \{x\}.$$
3. Si una sucesión $\{x_k\}_{k \in I\!N} \subset X$ converge, entonces su límite es único.

Pregunta 3

Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio vectorial topológico real separado. Si $V \subset X$ es un conjunto compacto, pruebe que:

1. Para todo $n \in I\!N$ el conjunto $nV := \{nx \ : \ x \in V\}$ es compacto.

2. Si $W \subseteq X$ es un conjunto abierto, absorbente y equilibrado, entonces

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} nW = X$$

y por lo tanto, existe $n^* \in \mathbb{N}$ tal que $V \subseteq n^* W$.

3. Si $0 \in \operatorname{int}(V)$ entonces, existe una cantidad finita $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de elementos en $2V$ tales que

$$2V \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (x_i + \operatorname{int}(V)).$$

Pregunta 4

Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio vectorial topológico real separado. Si existe $V \in \mathcal{V}(0)$ (conjunto de vecindades del cero del espacio vectorial) compacto, demuestre que:

1. Existe un subespacio vectorial M de X, de dimensión finita, tal que

$$2^n V \subseteq M + V \qquad \forall\, n \geq 1.$$

   Concluya que $M + V = X$.

   Indicación: Utilice el punto 3. de la Pregunta 3 para encontrar el subespacio vectorial M probando $2V \subseteq M + V$. Recuerde que si M es un subespacio vectorial, entonces $M + M = M$ y $\lambda M = M$ para todo $\lambda \neq 0$.

2. Si M es el subespacio vectorial de dimensión finita del punto anterior y $x \notin M$, justifique la existencia de un conjunto W abierto y equilibrado en $\mathcal{V}(0)$, subconjunto de V, tal que $(x + W) \cap M = \emptyset$ y por lo tanto, para todo $n \geq 1$ se tiene

$$nx \notin M + nW.$$

3. Concluya que si existe una vecindad compacta del cero, entonces el espacio vectorial X debe ser de dimensión finita.

Tiempo: 3 horas.