Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Instituto de Matemáticas
Pedagogía en Matemática
2008

Prueba 1: *Modelando fenómenos de evolución*

Profesores: Pedro Gajardo y Jaime Mena
Fecha: 28 de octubre 2008

Pregunta 1

Se desea estudiar la evolución de una especie aislada en la cual no haremos distinción (dentro de ella). Para ello, se sabe que en períodos pequeños de tiempo dt, el cual supondremos una variable continua, el nivel de la especie en un tiempo $t + dt$, que representaremos por $x(t + dt)$ puede describirse por la expresión

$$x(t + dt) = x(t) + \rho(x(t))x(t)dt \tag{S1}$$

donde para niveles fijos de la especie m y K, con $0 < m < K$ se tiene que la función $\rho : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es negativa si $x \in]0, m[$ ó $x > K$.

Una función $\rho : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisface lo anterior es:

$$\rho(x) = r\left(1 - \frac{x}{K}\right)(x - m), \tag{S2}$$

donde $r > 0$ es una constante. Para las siguientes preguntas se le pide considerar la anterior función.

1. A partir de (S1) y la función $\rho : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida en (S2) determine el sistema en tiempo continuo de la forma
$$\dot{x}(t) = f(x(t))$$
que describe la evolución de la población.
2. Calcule los equilibrios del sistema obtenido y determine si son localmente estables o inestables[1].
3. Justifique que si en un determinado tiempo t el nivel de la población $x(t)$ es menor a m, entonces ésta se extinguirá.

Pregunta 2

El objetivo de esta pregunta es analizar la evolución a tiempo discreto de un recurso natural renovable, medido en una sola variable, el cual es sometido a extracción.

La evolución del recurso sin extracción estará dada por el sistema

$$x(t + 1) = x(t) + f(x(t)) \tag{S3}$$

donde la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es la logística

$$f(x) = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right), \tag{S4}$$

[1] Se dira que un equilibrio es localmente inestable si no es estable.

con $r > 0$ y $K > 0$ constantes.

Al inicio de cada periodo de tiempo se extrae una proporción fija $h \in [0, 1]$ del recurso y luego, durante el periodo, el recurso que queda evoluciona.

1. Escriba el sistema a tiempo discreto que describe la evolución anteriormente señalada.
2. Dado un nivel de captura h calcular el equilibrio no nulo $x^*(h)$ (que depende de h) del sistema obtenido en el punto anterior. ¿Qué condición debe satisfacer h para que el equilibrio $x^*(h)$ sea positivo?
3. Determinar el nivel de captura h que maximiza la captura al equilibrio dada por $hx^*(h)$.

Tiempo: 90 minutos.