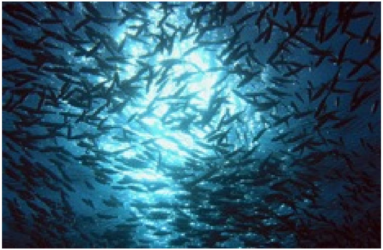
Introducción a la Ingeniería Civil Matemática

http://pgajardo.mat.utfsm.cl/iicmat2013.html

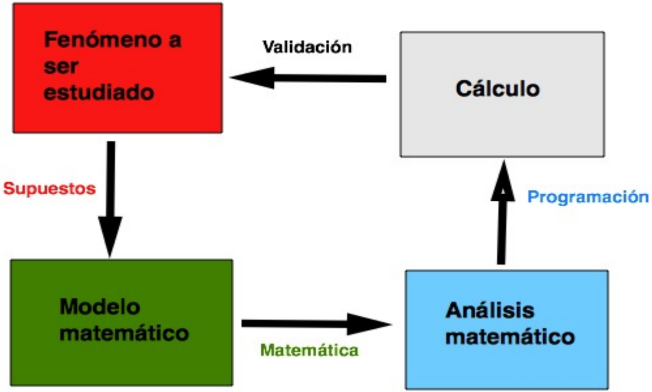
Ejemplo: ¿Cómo calcular cuotas pesqueras que sean sustentables?

Universidad Técnica Federico Santa María



15 de marzo 2013

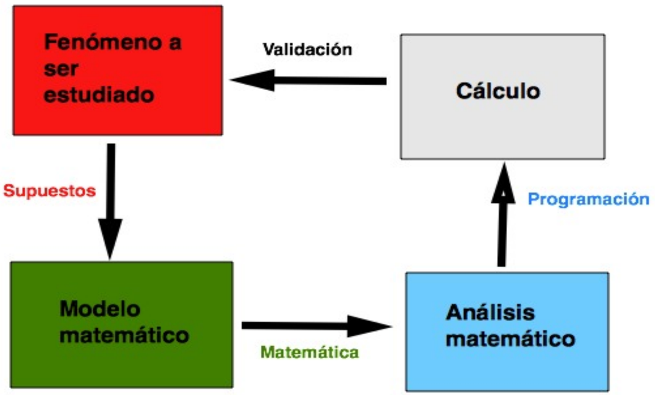
Modelamiento matemático



¿Qué puede hacer un ingeniero matemático? .... veamos un ejemplo

- Modelamiento matemático
- Fenómeno a ser estudiado: Evolución sin extracción
- Construcción del modelo
- Análisis del modelo
- Modelos con extracción del recurso
  - Niveles de captura
  - Capturas sustentables
- Conclusiones

Modelamiento matemático



Modelamiento matemático

Fenómeno a ser estudiado

La evolución de una población de peces en el transcurso del tiempo

Objetivos

- *Predecir el número de peces o biomasa (Kg.) que habrá en un determinado stock cada día*
- *Inferir qué pasará con la cantidad de peces cuando haya transcurrido mucho tiempo*

Modelamiento matemático

Fenómeno a ser estudiado

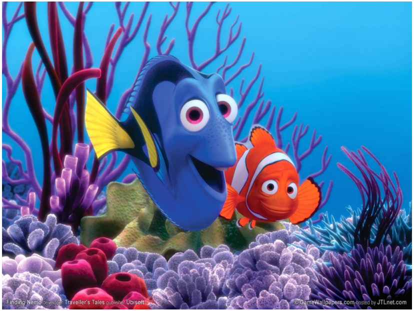
La evolución de una población de peces en el transcurso del tiempo

Objetivos

- *Predecir el número de peces o biomasa (Kg.) que habrá en un determinado stock cada día*
- *Inferir qué pasará con la cantidad de peces cuando haya transcurrido mucho tiempo*

Modelamiento matemático

Fenómeno a ser estudiado



Supuestos

- *Al comienzo del estudio, hay una cantidad* $x_0 > 0$ *de (biomasa, medida en Kg.) peces*
- *Cada año muere una proporción* $r \in \,]0, 1[$ *de los peces existentes. Ejemplo: Todos los años se muere la mitad de los peces* ($r = 1/2$)
- *Cada año nace una proporción* $p > 0$ *de los peces existentes. Ejemplo: Todos los años se triplica el número de peces* ($p = 3$).

Modelamiento matemático

Construcción del modelo

- Denotemos por x_k la cantidad de biomasa que hay el año $k = 1, 2, 3, \ldots$
- Si cada año muere una proporción $r \in]0, 1[$ de la biomasa existente, entonces podemos decir que
$$x_{k+1} = x_k - r x_k$$
- Si cada año se genera (nace y/o crece) una proporción $p > 0$ de la biomasa existente, entonces
$$x_{k+1} = x_k - r x_k + p x_k$$
- Lo cual nos permite deducir que
$$x_{k+1} = M x_k$$
donde $M = 1 - r + p$.
En el ejemplo, con $r = 1/2$ y

Modelamiento matemático

Construcción del modelo

- Denotemos por x_k la cantidad de biomasa que hay el año $k = 1, 2, 3, \ldots$
- Si cada año muere una proporción $r \in]0, 1[$ de la biomasa existente, entonces podemos decir que

$$x_{k+1} = x_k - rx_k$$

- Si cada año se genera (nace y/o crece) una proporción $p > 0$ de la biomasa existente, entonces

$$x_{k+1} = x_k - rx_k + px_k$$

- Lo cual nos permite deducir que

$$x_{k+1} = Mx_k$$

donde $M = 1 - r + p$.

En el ejemplo, con $r = 1/2$ y $p = 3$, se obtiene $M =$

Modelamiento matemático

Construcción del modelo

- Denotemos por x_k la cantidad de biomasa que hay el año $k = 1, 2, 3, \ldots$
- Si cada año muere una proporción $r \in]0, 1[$ de la biomasa existente, entonces podemos decir que

$$x_{k+1} = x_k - rx_k$$

- Si cada año se genera (nace y/o crece) una proporción $p > 0$ de la biomasa existente, entonces

$$x_{k+1} = x_k - rx_k + px_k$$

- Lo cual nos permite deducir que

$$x_{k+1} = Mx_k$$

donde $M = 1 - r + p$.

Modelamiento matemático

Construcción del modelo

- Denotemos por x_k la cantidad de biomasa que hay el año $k = 1, 2, 3, \ldots$
- Si cada año muere una proporción $r \in]0, 1[$ de la biomasa existente, entonces podemos decir que

$$x_{k+1} = x_k - rx_k$$

- Si cada año se genera (nace y/o crece) una proporción $p > 0$ de la biomasa existente, entonces

$$x_{k+1} = x_k - rx_k + px_k$$

- Lo cual nos permite deducir que

$$x_{k+1} = Mx_k$$

donde $M = 1 - r + p$.

En el ejemplo, con $r = 1/2$ y $p = 3$, se obtiene $M =$

Modelamiento matemático

Construcción del modelo

- Denotemos por x_k la cantidad de biomasa que hay el año $k = 1, 2, 3, \ldots$
- Si cada año muere una proporción $r \in \,]0, 1[$ de la biomasa existente, entonces podemos decir que

$$x_{k+1} = x_k - rx_k$$

- Si cada año se genera (nace y/o crece) una proporción $p > 0$ de la biomasa existente, entonces

$$x_{k+1} = x_k - rx_k + px_k$$

- Lo cual nos permite deducir que

$$x_{k+1} = Mx_k$$

donde $M = 1 - r + p$.

En el ejemplo, con $r = 1/2$ y $p = 3$, se obtiene $M =$

Modelamiento matemático

Construcción del modelo

- Denotemos por x_k la cantidad de biomasa que hay el año $k = 1, 2, 3, \ldots$
- Si cada año muere una proporción $r \in \,]0, 1[$ de la biomasa existente, entonces podemos decir que

$$x_{k+1} = x_k - rx_k$$

- Si cada año se genera (nace y/o crece) una proporción $p > 0$ de la biomasa existente, entonces

$$x_{k+1} = x_k - rx_k + px_k$$

- Lo cual nos permite deducir que

$$x_{k+1} = Mx_k$$

donde $M = 1 - r + p$.
En el ejemplo, con $r = 1/2$ *y* $p = 3$*, se obtiene* $M =$ 

Modelamiento matemático

Construcción del modelo y análisis

- Hasta el momento tenemos que

$$x_{k+1} = Mx_k$$

- Si x_0 es la cantidad de biomasa de peces al inicio (hoy) entonces, cuando ha pasado el primer año, se tendrá que

$$x_1 = Mx_0$$

- Pasado dos años se obtiene

$$x_2 = Mx_1 = M \cdot Mx_0 = M^2 x_0$$

- En tres años

$$x_3 = Mx_2 = M \cdot M^2 x_0 = M^3 x_0$$

- Sucesivamente, al cabo de k años

$$x_k = M^k x_0 \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Modelamiento matemático

Construcción del modelo y análisis

- Hasta el momento tenemos que

$$x_{k+1} = Mx_k$$

- Si x_0 es la cantidad de biomasa de peces al inicio (hoy) entonces, cuando ha pasado el primer año, se tendrá que

$$x_1 = Mx_0$$

- Pasado dos años se obtiene

$$x_2 = Mx_1 = M \cdot Mx_0 = M^2 x_0$$

- En tres años

$$x_3 = Mx_2 = M \cdot M^2 x_0 = M^3 x_0$$

- Sucesivamente, al cabo de k años

$$x_k = M^k x_0 \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Modelamiento matemático

Construcción del modelo y análisis

- Hasta el momento tenemos que

$$x_{k+1} = Mx_k$$

- Si x_0 es la cantidad de biomasa de peces al inicio (hoy) entonces, cuando ha pasado el primer año, se tendrá que

$$x_1 = Mx_0$$

- Pasado dos años se obtiene

$$x_2 = Mx_1 = M \cdot Mx_0 = M^2 x_0$$

- En tres años

$$x_3 = Mx_2 = M \cdot M^2 x_0 = M^3 x_0$$

- Sucesivamente, al cabo de k años

$$x_k = M^k x_0 \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Modelamiento matemático

Construcción del modelo y análisis

- Hasta el momento tenemos que

$$x_{k+1} = Mx_k$$

- Si x_0 es la cantidad de biomasa de peces al inicio (hoy) entonces, cuando ha pasado el primer año, se tendrá que

$$x_1 = Mx_0$$

- Pasado dos años se obtiene

$$x_2 = Mx_1 = M \cdot Mx_0 = M^2 x_0$$

- En tres años

$$x_3 = Mx_2 = M \cdot M^2 x_0 = M^3 x_0$$

- Sucesivamente, al cabo de k años

$$x_k = M^k x_0 \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Modelamiento matemático

Construcción del modelo y análisis

- Hasta el momento tenemos que

$$x_{k+1} = Mx_k$$

- Si x_0 es la cantidad de biomasa de peces al inicio (hoy) entonces, cuando ha pasado el primer año, se tendrá que

$$x_1 = Mx_0$$

- Pasado dos años se obtiene

$$x_2 = Mx_1 = M \cdot Mx_0 = M^2 x_0$$

- En tres años

$$x_3 = Mx_2 = M \cdot M^2 x_0 = M^3 x_0$$

- Sucesivamente, al cabo de k años

$$x_k = M^k x_0 \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Modelamiento matemático

Análisis Matemático

- Hasta el momento hemos construido el modelo matemático

$$x_{k+1} = Mx_k$$

  donde $M = 1 + p - r$ (uno + fracción que crece/nace − fracción que muere)

- Si x_0 es la cantidad de biomasa de peces al inicio, entonces el año $k = 1, 2, 3 \ldots$ habrá la siguiente cantidad de biomasa

$$x_k = M^k x_0 \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

- Si $M > 1$ (¿qué significa esto?), entonces tenemos que $x_k \to +\infty$ cuando han pasado muchos años
- Si $M < 1$ (¿qué significa esto?), entonces tenemos que $x_k \to 0$ (extinción)
- ¿Son realistas estas conclusiones?

Modelamiento matemático

Análisis Matemático

- Hasta el momento hemos construido el modelo matemático

$$x_{k+1} = Mx_k$$

donde $M = 1 + p - r$ (uno + fracción que crece/nace − fracción que muere)

- Si x_0 es la cantidad de biomasa de peces al inicio, entonces el año $k = 1, 2, 3 \ldots$ habrá la siguiente cantidad de biomasa

$$x_k = M^k x_0 \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

- Si $M > 1$ (¿qué significa esto?), entonces tenemos que $x_k \to +\infty$ cuando han pasado muchos años
- Si $M < 1$ (¿qué significa esto?), entonces tenemos que $x_k \to 0$ (extinción)
- ¿Son realistas estas conclusiones?

Modelamiento matemático

Análisis Matemático

- Hasta el momento hemos construido el modelo matemático

$$x_{k+1} = Mx_k$$

donde $M = 1 + p - r$ (uno + fracción que crece/nace − fracción que muere)

- Si x_0 es la cantidad de biomasa de peces al inicio, entonces el año $k = 1, 2, 3 \dots$ habrá la siguiente cantidad de biomasa

$$x_k = M^k x_0 \qquad k = 1, 2, 3, \dots$$

- Si $M > 1$ (¿qué significa esto?), entonces tenemos que $x_k \to +\infty$ cuando han pasado muchos años
- Si $M < 1$ (¿qué significa esto?), entonces tenemos que $x_k \to 0$ (extinción)
- ¿Son realistas estas conclusiones?

Modelamiento matemático

Análisis Matemático

- Hasta el momento hemos construido el modelo matemático

$$x_{k+1} = Mx_k$$

  donde $M = 1 + p - r$ (uno + fracción que crece/nace − fracción que muere)
- Si x_0 es la cantidad de biomasa de peces al inicio, entonces el año $k = 1, 2, 3\ldots$ habrá la siguiente cantidad de biomasa

$$x_k = M^k x_0 \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

- Si $M > 1$ (¿qué significa esto?), entonces tenemos que $x_k \to +\infty$ cuando han pasado muchos años
- Si $M < 1$ (¿qué significa esto?), entonces tenemos que $x_k \to 0$ (extinción)
- ¿Son realistas estas conclusiones?

Modelamiento matemático

Análisis Matemático

- Hasta el momento hemos construido el modelo matemático

$$x_{k+1} = Mx_k$$

  donde $M = 1 + p - r$ (uno + fracción que crece/nace − fracción que muere)

- Si x_0 es la cantidad de biomasa de peces al inicio, entonces el año $k = 1, 2, 3 \ldots$ habrá la siguiente cantidad de biomasa

$$x_k = M^k x_0 \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

- Si $M > 1$ (¿qué significa esto?), entonces tenemos que $x_k \to +\infty$ cuando han pasado muchos años
- Si $M < 1$ (¿qué significa esto?), entonces tenemos que $x_k \to 0$ (extinción)
- ¿Son realistas estas conclusiones?

Modelamiento matemático

Análisis Matemático

- Un modelo matemático alternativo, podría consistir en remplazar $x_{k+1} = Mx_k$ por

$$x_{k+1} = M(x_k)x_k$$

es decir, cambiamos la constante M por una función $M(x)$ que represente lo siguiente:

  - Cuando x sea "grande", $M(x)$ sea pequeño (menor que 1)
  - Cuando x sea "pequeño", $M(x)$ sea grande (mayor que 1)

- La función más simple que satisface lo anterior es:

$$M(x) = 1 + r\left(1 - \frac{x}{K}\right)$$

donde r y K son constantes que se deben determinar

Modelamiento matemático

Análisis Matemático

- Un modelo matemático alternativo, podría consistir en remplazar $x_{k+1} = Mx_k$ por

$$x_{k+1} = M(x_k)x_k$$

  es decir, cambiamos la constante M por una función $M(x)$ que represente lo siguiente:

  - Cuando x sea "grande", $M(x)$ sea pequeño (menor que 1)
  - Cuando x sea "pequeño", $M(x)$ sea grande (mayor que 1)

- La función más simple que satisface lo anterior es:

$$M(x) = 1 + r\left(1 - \frac{x}{K}\right)$$

  donde r y K son constantes que se deben determinar

Modelamiento matemático

Análisis Matemático

- Un modelo matemático alternativo, podría consistir en remplazar $x_{k+1} = Mx_k$ por
$$x_{k+1} = M(x_k)x_k$$
es decir, cambiamos la constante M por una función $M(x)$ que represente lo siguiente:
  - Cuando x sea "grande", $M(x)$ sea pequeño (menor que 1)
  - Cuando x sea "pequeño", $M(x)$ sea grande (mayor que 1)
- La función más simple que satisface lo anterior es:
$$M(x) = 1 + r\left(1 - \frac{x}{K}\right)$$
donde r y K son constantes que se deben determinar

Modelamiento matemático

Análisis Matemático

- Un modelo matemático alternativo, podría consistir en remplazar $x_{k+1} = Mx_k$ por

$$x_{k+1} = M(x_k)x_k$$

  es decir, cambiamos la constante M por una función $M(x)$ que represente lo siguiente:

  - Cuando x sea ”grande”, $M(x)$ sea pequeño (menor que 1)
  - Cuando x sea ”pequeño”, $M(x)$ sea grande (mayor que 1)

- La función más simple que satisface lo anterior es:

$$M(x) = 1 + r\left(1 - \frac{x}{K}\right)$$

  donde r y K son constantes que se deben determinar

- Nuestro nuevo modelo matemático es entonces:

$$x_{k+1} = x_k + r\, x_k \left(1 - \frac{x_k}{K}\right) = f(x_k)$$

- Ya no será tan fácil deducir una expresión explícita para x_k
- Sin embargo, para modelos de la forma

$$x_{k+1} = f(x_k)$$

a veces es posible demostrar que $x_k \to x^*$, donde x^* es solución de la ecuación

$$f(x) = x$$

- En nuestro caso, tenemos que

$$f(x) = x + r\, x \left(1 - \frac{x}{K}\right)$$

por lo tanto, las soluciones de la ecuación $f(x) = x$ son:

$$x^* = 0 \quad \text{y} \quad x^* = K$$

Modelamiento matemático

Análisis Matemático

- Nuestro nuevo modelo matemático es entonces:

$$x_{k+1} = x_k + r\, x_k \left(1 - \frac{x_k}{K}\right) = f(x_k)$$

- Ya no será tan fácil deducir una expresión explícita para x_k
- Sin embargo, para modelos de la forma

$$x_{k+1} = f(x_k)$$

a veces es posible demostrar que $x_k \to x^*$, donde x^* es solución de la ecuación

$$f(x) = x$$

- En nuestro caso, tenemos que

$$f(x) = x + r\, x \left(1 - \frac{x}{K}\right)$$

por lo tanto, las soluciones de la ecuación $f(x) = x$ son:

$$x^* = 0 \quad \text{y} \quad x^* = K$$

Modelamiento matemático

Análisis Matemático

- Nuestro nuevo modelo matemático es entonces:

$$x_{k+1} = x_k + r\, x_k \left(1 - \frac{x_k}{K}\right) = f(x_k)$$

- Ya no será tan fácil deducir una expresión explícita para x_k
- Sin embargo, para modelos de la forma

$$x_{k+1} = f(x_k)$$

a veces es posible demostrar que $x_k \to x^*$, donde x^* es solución de la ecuación

$$f(x) = x$$

- En nuestro caso, tenemos que

$$f(x) = x + r\, x \left(1 - \frac{x}{K}\right)$$

por lo tanto, las soluciones de la ecuación $\quad f(x) = x \quad$ son:

$$x^* = 0 \quad \text{y} \quad x^* = K$$

- Nuestro nuevo modelo matemático es entonces:

$$x_{k+1} = x_k + r\, x_k \left(1 - \frac{x_k}{K}\right) = f(x_k)$$

- Ya no será tan fácil deducir una expresión explícita para x_k
- Sin embargo, para modelos de la forma

$$x_{k+1} = f(x_k)$$

  a veces es posible demostrar que $x_k \to x^*$, donde x^* es solución de la ecuación

$$f(x) = x$$

- En nuestro caso, tenemos que

$$f(x) = x + r\, x \left(1 - \frac{x}{K}\right)$$

  por lo tanto, las soluciones de la ecuación $\;f(x) = x\;$ son:

$$x^* = 0 \quad \text{y} \quad x^* = K$$

Término de extracción (captura)

- El modelo con el cual trabajaremos es:

$$x_{k+1} = x_k + r\,x_k \left(1 - \frac{x_k}{K}\right) = f(x_k)$$

- Supongamos que al final de cada año, se extrae una porción $h \in [0, 1]$ del recurso que durante ese año ha crecido
- El modelo que reflejaría tal situación es

$$x_{k+1} = (1-h)\,\left(x_k + r\,x_k\left(1 - \frac{x_k}{K}\right)\right) = (1-h)\,f(x_k)$$

- Si $h = 0$ el recurso evoluciona según el modelo que teníamos antes
- Si $h = 1$ el recurso se extingue
- Observe que el anterior modelo se puede escribir como

$$x_{k+1} = g_h(x_k)$$

donde la función $g_h(x)$ está dada por

$$g_h(x) = (1-h)\,\left(x + r\,x\,\left(1 - \frac{x}{K}\right)\right)$$

Término de extracción (captura)

- El modelo con el cual trabajaremos es:

$$x_{k+1} = x_k + r\, x_k \left(1 - \frac{x_k}{K}\right) = f(x_k)$$

- Supongamos que al final de cada año, se extrae una porción $h \in [0, 1]$ del recurso que durante ese año ha crecido
- El modelo que reflejaría tal situación es

$$x_{k+1} = (1-h)\,\left(x_k + r\, x_k \left(1 - \frac{x_k}{K}\right)\right) = (1-h)\, f(x_k)$$

- Si $h = 0$ el recurso evoluciona según el modelo que teníamos antes
- Si $h = 1$ el recurso se extingue
- Observe que el anterior modelo se puede escribir como

$$x_{k+1} = g_h(x_k)$$

donde la función $g_h(x)$ está dada por

$$g_h(x) = (1-h)\,\left(x + r\, x\left(1 - \frac{x}{K}\right)\right)$$

Término de extracción (captura)

- El modelo con el cual trabajaremos es:

$$x_{k+1} = x_k + r\, x_k \left(1 - \frac{x_k}{K}\right) = f(x_k)$$

- Supongamos que al final de cada año, se extrae una porción $h \in \; [0, 1]$ del recurso que durante ese año ha crecido
- El modelo que reflejaría tal situación es

$$x_{k+1} = (1-h)\, \left(x_k + r\, x_k \left(1 - \frac{x_k}{K}\right)\right) = (1-h)\, f(x_k)$$

- Si $h = 0$ el recurso evoluciona según el modelo que teníamos antes
- Si $h = 1$ el recurso se extingue
- Observe que el anterior modelo se puede escribir como

$$x_{k+1} = g_h(x_k)$$

donde la función $g_h(x)$ está dada por

$$g_h(x) = (1-h)\, \left(x + r\, x \left(1 - \frac{x}{K}\right)\right)$$

Término de extracción (captura)

- El modelo con el cual trabajaremos es:

$$x_{k+1} = x_k + r\,x_k\left(1 - \frac{x_k}{K}\right) = f(x_k)$$

- Supongamos que al final de cada año, se extrae una porción $h \in [0,1]$ del recurso que durante ese año ha crecido
- El modelo que reflejaría tal situación es

$$x_{k+1} = (1-h)\,\left(x_k + r\,x_k\left(1 - \frac{x_k}{K}\right)\right) = (1-h)\,f(x_k)$$

- Si $h = 0$ el recurso evoluciona según el modelo que teníamos antes
- Si $h = 1$ el recurso se extingue
- Observe que el anterior modelo se puede escribir como

$$x_{k+1} = g_h(x_k)$$

donde la función $g_h(x)$ está dada por

$$g_h(x) = (1-h)\,\left(x + r\,x\left(1 - \frac{x}{K}\right)\right)$$

Término de extracción (captura)

- El modelo con el cual trabajaremos es:

$$x_{k+1} = x_k + r\,x_k\left(1 - \frac{x_k}{K}\right) = f(x_k)$$

- Supongamos que al final de cada año, se extrae una porción $h \in [0,1]$ del recurso que durante ese año ha crecido
- El modelo que reflejaría tal situación es

$$x_{k+1} = (1-h)\,\left(x_k + r\,x_k\left(1 - \frac{x_k}{K}\right)\right) = (1-h)\,f(x_k)$$

- Si $h = 0$ el recurso evoluciona según el modelo que teníamos antes
- Si $h = 1$ el recurso se extingue
- Observe que el anterior modelo se puede escribir como

$$x_{k+1} = g_h(x_k)$$

donde la función $g_h(x)$ está dada por

$$g_h(x) = (1-h)\,\left(x + r\,x\left(1 - \frac{x}{K}\right)\right)$$

Término de extracción (captura)

- El modelo con el cual trabajaremos es:

$$x_{k+1} = x_k + r\, x_k \left(1 - \frac{x_k}{K}\right) = f(x_k)$$

- Supongamos que al final de cada año, se extrae una porción $h \in [0, 1]$ del recurso que durante ese año ha crecido
- El modelo que reflejaría tal situación es

$$x_{k+1} = (1 - h)\, \left(x_k + r\, x_k \left(1 - \frac{x_k}{K}\right)\right) = (1 - h)\, f(x_k)$$

- Si $h = 0$ el recurso evoluciona según el modelo que teníamos antes
- Si $h = 1$ el recurso se extingue
- Observe que el anterior modelo se puede escribir como

$$x_{k+1} = g_h(x_k)$$

donde la función $g_h(x)$ está dada por

$$g_h(x) = (1 - h)\, \left(x + r\, x \left(1 - \frac{x}{K}\right)\right)$$

Término de extracción (captura)

- Nuestro modelo matemático actual es:

$$x_{k+1} = (1-h)\ \left(x_k + r\,x_k\left(1 - \frac{x_k}{K}\right)\right) = g_h(x_k)$$

- Es posible mostrar que $x_k \to x^*$ donde x^* es una solución de la ecuación

$$g_h(x) = x$$

donde

$$g_h(x) = (1-h)\ \left(x + r\,x\left(1 - \frac{x}{K}\right)\right)$$

Término de extracción (captura)

- Nuestro modelo matemático actual es:

$$x_{k+1} = (1-h)\left(x_k + r\,x_k\left(1-\frac{x_k}{K}\right)\right) = g_h(x_k)$$

- Es posible mostrar que $x_k \to x^*$ donde x^* es una solución de la ecuación

$$g_h(x) = x$$

  donde

$$g_h(x) = (1-h)\left(x + r\,x\left(1-\frac{x}{K}\right)\right)$$

Término de extracción (captura)

- Debemos resolver la ecuación

$$x = (1-h)\left(x + r\,x\left(1-\frac{x}{K}\right)\right)$$

para saber a dónde tenderá x_k (la cantidad del recurso)

- Una solución es $x^* = 0$
- La otra solución (¿por qué podremos asegurar que hay sólo dos soluciones?), es

$$x_h^* = K\left(1 - \frac{h}{r(1-h)}\right)$$

- Para que la anterior solución sea positiva, se debe imponer

$$K\left(1 - \frac{h}{r(1-h)}\right) > 0$$

$$1 > \frac{h}{r(1-h)}$$

$$h < \frac{r}{(1+r)}$$

Término de extracción (captura)

- Debemos resolver la ecuación

$$x = (1-h)\left(x + r\,x\left(1 - \frac{x}{K}\right)\right)$$

para saber a dónde tenderá x_k (la cantidad del recurso)

- Una solución es $x^* = 0$
- La otra solución (¿por qué podremos asegurar que hay sólo dos soluciones?), es

$$x_h^* = K\left(1 - \frac{h}{r(1-h)}\right)$$

- Para que la anterior solución sea positiva, se debe imponer

$$K\left(1 - \frac{h}{r(1-h)}\right) > 0$$

Término de extracción (captura)

- Debemos resolver la ecuación
$$x = (1-h)\left(x + r\,x\left(1-\frac{x}{K}\right)\right)$$
para saber a dónde tenderá x_k (la cantidad del recurso)
- Una solución es $x^* = 0$
- La otra solución (¿por qué podremos asegurar que hay sólo dos soluciones?), es
$$x_h^* = K\left(1 - \frac{h}{r(1-h)}\right)$$
- Para que la anterior solución sea positiva, se debe imponer
$$K\left(1 - \frac{h}{r(1-h)}\right) > 0$$

Término de extracción (captura)

- Debemos resolver la ecuación

$$x = (1-h)\left(x + r\,x\left(1 - \frac{x}{K}\right)\right)$$

para saber a dónde tenderá x_k (la cantidad del recurso)

- Una solución es $x^* = 0$
- La otra solución (¿por qué podremos asegurar que hay sólo dos soluciones?), es

$$x_h^* = K\left(1 - \frac{h}{r(1-h)}\right)$$

- Para que la anterior solución sea positiva, se debe imponer

$$K\left(1 - \frac{h}{r(1-h)}\right) > 0$$

$$1 > \frac{h}{r(1-h)}$$

$$h < \frac{r}{(1+r)}$$

Término de extracción (captura)

- Debemos resolver la ecuación

$$x = (1-h)\left(x + r\,x\left(1 - \frac{x}{K}\right)\right)$$

para saber a dónde tenderá x_k (la cantidad del recurso)

- Una solución es $x^* = 0$
- La otra solución (¿por qué podremos asegurar que hay sólo dos soluciones?), es

$$x_h^* = K\left(1 - \frac{h}{r(1-h)}\right)$$

- Para que la anterior solución sea positiva, se debe imponer

$$K\left(1 - \frac{h}{r(1-h)}\right) > 0$$

$$1 > \frac{h}{r(1-h)}$$

$$h < \frac{r}{(1+r)}$$

Término de extracción (captura)

- Debemos resolver la ecuación

$$x = (1-h)\left(x + r\,x\left(1 - \frac{x}{K}\right)\right)$$

  para saber a dónde tenderá x_k (la cantidad del recurso)
- Una solución es $x^* = 0$
- La otra solución (¿por qué podremos asegurar que hay sólo dos soluciones?), es

$$x_h^* = K\left(1 - \frac{h}{r(1-h)}\right)$$

- Para que la anterior solución sea positiva, se debe imponer

$$K\left(1 - \frac{h}{r(1-h)}\right) > 0$$

$$1 > \frac{h}{r(1-h)}$$

$$h < \frac{r}{(1+r)}$$

Término de extracción (captura)

- Debemos resolver la ecuación

$$x = (1-h)\left(x + r\,x\left(1 - \frac{x}{K}\right)\right)$$

para saber a dónde tenderá x_k (la cantidad del recurso)

- Una solución es $x^* = 0$
- La otra solución (¿por qué podremos asegurar que hay sólo dos soluciones?), es

$$x_h^* = K\left(1 - \frac{h}{r(1-h)}\right)$$

- Para que la anterior solución sea positiva, se debe imponer

$$K\left(1 - \frac{h}{r(1-h)}\right) > 0$$

$$1 > \frac{h}{r(1-h)}$$

$$h < \frac{r}{(1+r)}$$

Capturas sustentables

- Si
$$h > \frac{r}{(1+r)}$$
entonces $x_h^* < 0$ y, por lo tanto, x_k tenderá a la única solución posible (el cero) la cual representa la extinción del recurso

- Dado un nivel de extracción
$$h < \frac{r}{(1+r)}$$
es posible probar que
$$x_k \to x_h^* = K\left(1 - \frac{h}{r(1-h)}\right) > 0$$

Capturas sustentables

- Si
$$h > \frac{r}{(1+r)}$$
entonces $x_h^* < 0$ y, por lo tanto, x_k tenderá a la única solución posible (el cero) la cual representa la extinción del recurso
- Dado un nivel de extracción
$$h < \frac{r}{(1+r)}$$
es posible probar que
$$x_k \to x_h^* = K\left(1 - \frac{h}{r(1-h)}\right) > 0$$

Término de extracción (captura)

- De ahora en adelante, supongamos que el nivel de extracción (cuota) satisface

$$h < \frac{r}{(1+r)}$$

y, por lo tanto

$$x_k \to x_h^*$$

- La idea es entonces fijar una cuota h tal que el nivel x_h^* (hacia donde tenderá el nivel del recurso) sea uno *deseado*

Término de extracción (captura)

- De ahora en adelante, supongamos que el nivel de extracción (cuota) satisface

$$h < \frac{r}{(1+r)}$$

y, por lo tanto

$$x_k \to x_h^*$$

- La idea es entonces fijar una cuota h tal que el nivel x_h^* (hacia donde tenderá el nivel del recurso) sea uno *deseado*

Término de extracción (captura)

- Si queremos que

$$x_h^* = \frac{3}{4}K$$

  ¿qué cuota deberíamos imponer?

- La respuesta se deduce al resolver la ecuación

$$x_h^* = K\left(1 - \frac{h}{r(1-h)}\right) = \frac{3}{4}K$$

Término de extracción (captura)

- Si queremos que
  $$x_h^* = \frac{3}{4}K$$
  ¿qué cuota deberíamos imponer?
- La respuesta se deduce al resolver la ecuación
  $$x_h^* = K\left(1 - \frac{h}{r(1-h)}\right) = \frac{3}{4}K$$
  la cual tiene por solución
  $$h = \frac{r}{4+r}$$
- ¿Y si quisiéramos?
  $$x_h^* = \frac{K}{10}$$
  la respuesta es
  $$h = \frac{9r}{9r+10}$$

Término de extracción (captura)

- Si queremos que

$$x_h^* = \frac{3}{4}K$$

¿qué cuota deberíamos imponer?

- La respuesta se deduce al resolver la ecuación

$$x_h^* = K\left(1 - \frac{h}{r(1-h)}\right) = \frac{3}{4}K$$

la cual tiene por solución

$$h = \frac{r}{4+r}$$

- ¿Y si quisiéramos?

$$x_h^* = \frac{K}{10}$$

la respuesta es

Término de extracción (captura)

- Si queremos que

  $$x_h^* = \frac{3}{4}K$$

  ¿qué cuota deberíamos imponer?

- La respuesta se deduce al resolver la ecuación

  $$x_h^* = K\left(1 - \frac{h}{r(1-h)}\right) = \frac{3}{4}K$$

  la cual tiene por solución

  $$h = \frac{r}{4+r}$$

- ¿Y si quisiéramos?

  $$x_h^* = \frac{K}{10}$$

Término de extracción (captura)

- Si queremos que
$$x_h^* = \frac{3}{4}K$$
¿qué cuota deberíamos imponer?
- La respuesta se deduce al resolver la ecuación
$$x_h^* = K\left(1 - \frac{h}{r(1-h)}\right) = \frac{3}{4}K$$
la cual tiene por solución
$$h = \frac{r}{4+r}$$
- ¿Y si quisiéramos?
$$x_h^* = \frac{K}{10}$$

la respuesta es
$$h = \frac{9\,r}{9\,r+10}$$

Término de extracción (captura)

- Si queremos que
$$x_h^* = \frac{3}{4}K$$
¿qué cuota deberíamos imponer?
- La respuesta se deduce al resolver la ecuación
$$x_h^* = K\left(1 - \frac{h}{r(1-h)}\right) = \frac{3}{4}K$$
la cual tiene por solución
$$h = \frac{r}{4+r}$$
- ¿Y si quisiéramos?
$$x_h^* = \frac{K}{10}$$
la respuesta es
$$h = \frac{9\,r}{9\,r+10}$$

Término de extracción (captura)

- Si queremos que
$$x_h^* = \frac{3}{4}K$$
¿qué cuota deberíamos imponer?
- La respuesta se deduce al resolver la ecuación
$$x_h^* = K\left(1 - \frac{h}{r(1-h)}\right) = \frac{3}{4}K$$
la cual tiene por solución
$$h = \frac{r}{4+r}$$
- ¿Y si quisiéramos?
$$x_h^* = \frac{K}{10}$$

la respuesta es
$$h = \frac{9\,r}{9\,r + 10}$$

Máxima captura sustentable

- Dado que al imponer diferentes cuotas, podemos regular el nivel x_h^* hacia donde tenderá el recurso, ¿cual es la *mejor* cuota a aplicar?
- En nuestro modelo, al aplicar una cuota h se tiene que el recurso evoluciona según
$$x_{k+1} = (1-h)\, f(x_k)$$
donde
$$f(x) = \left(x + r\,x\left(1 - \frac{x}{K}\right)\right)$$
- Como $x_k \to x_h^*$, pasado mucho tiempo se extraerá $h\,x_h^*$ del recurso (para utilización comercial)

Máxima captura sustentable

- Dado que al imponer diferentes cuotas, podemos regular el nivel x_h^* hacia donde tenderá el recurso, ¿cual es la *mejor* cuota a aplicar?
- En nuestro modelo, al aplicar una cuota h se tiene que el recurso evoluciona según

$$x_{k+1} = (1-h)\, f(x_k)$$

donde

$$f(x) = \left(x + r\,x\,\left(1 - \frac{x}{K}\right)\right)$$

- Como $x_k \to x_h^*$, pasado mucho tiempo se extraerá $h\,x_h^*$ del recurso (para utilización comercial)

Máxima captura sustentable

- Dado que al imponer diferentes cuotas, podemos regular el nivel x_h^* hacia donde tenderá el recurso, ¿cual es la *mejor* cuota a aplicar?
- En nuestro modelo, al aplicar una cuota h se tiene que el recurso evoluciona según
$$x_{k+1} = (1-h)\, f(x_k)$$
donde
$$f(x) = \left(x + r\,x\,\left(1 - \frac{x}{K}\right)\right)$$
- Como $x_k \to x_h^*$, pasado mucho tiempo se extraerá $h\,x_h^*$ del recurso (para utilización comercial)

Máxima captura sustentable

- Cuando ha pasado tiempo, se estará extrayendo

$$h\,x_h^* = hK\left(1 - \frac{h}{r(1-h)}\right)$$

- ¿Para qué h la anterior cantidad es máxima?
- La respuesta es

$$h = \frac{r}{2+r}$$

- Para dicha cuota, el nivel al cual tiende el recurso es

$$x_h^* = \frac{K}{2}$$

- Este nivel se denomina *Máxima Captura Sustentable (MSY), nivel que en muchas pesquerías es el que se busca obtener*

Máxima captura sustentable

- Cuando ha pasado tiempo, se estará extrayendo

$$h\,x_h^* = hK\left(1 - \frac{h}{r(1-h)}\right)$$

- ¿Para qué h la anterior cantidad es máxima?
- La respuesta es

$$h = \frac{r}{2+r}$$

- Para dicha cuota, el nivel al cual tiende el recurso es

$$x_h^* = \frac{K}{2}$$

- Este nivel se denomina *Máxima Captura Sustentable (MSY), nivel que en muchas pesquerías es el que se busca obtener*

Máxima captura sustentable

- Cuando ha pasado tiempo, se estará extrayendo

$$h\, x_h^* = hK\left(1 - \frac{h}{r(1-h)}\right)$$

- ¿Para qué h la anterior cantidad es máxima?
- La respuesta es

$$h = \frac{r}{2+r}$$

- Para dicha cuota, el nivel al cual tiende el recurso es

$$x_h^* = \frac{K}{2}$$

- Este nivel se denomina *Máxima Captura Sustentable (MSY), nivel que en muchas pesquerías es el que se busca obtener*

Máxima captura sustentable

- Cuando ha pasado tiempo, se estará extrayendo

$$h\, x_h^* = hK\left(1 - \frac{h}{r(1-h)}\right)$$

- ¿Para qué h la anterior cantidad es máxima?
- La respuesta es

$$h = \frac{r}{2+r}$$

- Para dicha cuota, el nivel al cual tiende el recurso es

$$x_h^* = \frac{K}{2}$$

- Este nivel se denomina *Máxima Captura Sustentable (MSY), nivel que en muchas pesquerías es el que se busca obtener*

Máxima captura sustentable

- Cuando ha pasado tiempo, se estará extrayendo

$$h\, x_h^* = hK\left(1 - \frac{h}{r(1-h)}\right)$$

- ¿Para qué h la anterior cantidad es máxima?
- La respuesta es

$$h = \frac{r}{2+r}$$

- Para dicha cuota, el nivel al cual tiende el recurso es

$$x_h^* = \frac{K}{2}$$

- Este nivel se denomina *Máxima Captura Sustentable (MSY), nivel que en muchas pesquerías es el que se busca obtener*

Conclusiones

- Se comenzó con un modelo muy simple que describía la evolución de un recurso sin extracción
- Las conclusiones de ese modelo no eran del todo realista, por lo que se propuso uno nuevo
- Se incluyó un término de extracción en el modelo
- Dada una cuota, se calculó el nivel al cual tendía el recurso, siendo éste un nivel sustentable
- Se determinó para qué cuota se obtiene el máximo nivel de captura sustentable (MSY)