Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Matemática
Ingeniería Civil Matemática

Tarea Final - Introducción a la Ingeniería (IWG 101 - 20)

Profesor: Pedro Gajardo

Ayudante: Sebastián Torres

Fecha de entrega: 13 de septiembre 2013 (17h00)

Lugar de entrega: Secretaría Vicerrectoría Asuntos Económicos y Administrativos (segundo piso Edificio A)

Entregar resueltos al menos tres de los siguientes problemas.

Pregunta 1

Demuestre que toda función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz, es localmente Lipschitz.

Pregunta 2

Considere el siguiente modelo de evolución a tiempo continuo, dado por la ecuación diferencial ordinaria:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = af(x(t)) - (\mu + r)x(t) & t > 0 \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{S}$$

donde la condición inicial x_0 es un valor positivo, a, μ, r son parámetros positivos y la función $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ está definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \; x = 0 \\ \rho x \ln\left(\frac{K}{x}\right) & \text{si } \; x > 0 \end{cases}$$

con ρ y K constantes positivas.

1. Justifique la ecuación diferencial ordinaria tiene una única solución global;
2. Demuestre existe un único equilibrio positivo, independientemente de los valores que tengan los parámetros;
3. Pruebe que la única solución global converge al único equilibrio positivo cuando $t \to +\infty$.

Pregunta 3

Se desea modelar la evolución, bajo explotación, de un recurso natural renovable tal que a bajas concentraciones el número de individuos decrece. Para ello notaremos por $x_k \in \mathbb{R}_+$ el número de individuos en el k-ésimo periodo, describiendo la evolución por el siguiente modelo a tiempo discreto:

$$x_{k+1} = (1-h)\left[x_k + \rho x_k \left(1 - \frac{x_k}{K}\right)\right] \qquad k \geq 1$$

donde ρ y K son parámetros positivos propios a la biología de la especie. El factor $h \in [0,1]$ indica la fracción que se explota del recurso al final de cada periodo.

1. Determine para qué valores de h este modelo tiene un único equilibrio positivo;
2. Determine para qué valor de h se obtiene el máximo rendimiento sustentable (MSY) explicítando dicho valor en término de los parámetros.

Pregunta 4

Sean m y K dos parámetros positivos tales que $0 < m < K$ y $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^1$ que satisface:

- $\phi(0) = 0$;
- $\phi(x) > 0$ para todo $x < 0$;
- $\phi(x) < 0$ para todo $x > 0$.

Con los parámetros m y K y la función g se da origen a un modelo de evolución a tiempo continuo, representado por la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = x(t)\ (x(t) - m)\phi(x(t) - K) & t > 0 \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{S}$$

donde la condición inicial x_0 es un valor positivo.

1. Demuestre que la ecuación diferencial (S) tiene una única solución global.
2. Pruebe que el modelo (S) tiene dos equilibrios positivos.
3. Si x_1^* y x_2^* son los dos equilibrios positivos del modelo, con $0 < x_1^* < x_2^*$, pruebe que $x^* = 0$ es un equilibrio globalmente estable en el intervalo $]0, x_1^*[$ y x_2^* es un equilibrio globalmente estable en el intervalo $]x_1^*, +\infty[$.

Pregunta 5

Considere el modelo a tiempo discreto dado por la siguiente ecuación de recurrencia

$$x_{k+1} = 2x_k \left(1 - \frac{x_k}{K}\right) \qquad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

donde $K > 0$ es un parámetro dado.

Demuestre que si la condición inicial x_0 es $\frac{K}{4}$, entonces la sucesión $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge al único equilibrio positivo del modelo, el cual se le pide determinar previamente.

Pregunta 6

Una empresa fabricante de teléfonos celulares, está *ad portas* de lanzar al mercado su último modelo, para lo cual se encuentra realizando un estudio de mercado. En éste, se ha determinado la existencia de tres tipos de público que adquirirán preferentemente el nuevo modelo de celular. Debido al canal de distribución que se utilice, la ganancia directa por la venta del producto varía según el tipo público. Por otro lado, la empresa estima que el costo por publicidad (costo no incluido en la determinación de la ganancia directa) y tiempo de venta por unidad variaría también según el público. La tabla siguiente presenta las ganancias directas, los costos de publicidad y el tiempo de venta por unidad dependiendo el tipo de público:

Público objetivo	Ganancia [$/un.]	Costo de publicidad [$/un.]	Tiempo de venta [h/un.]
A	90	10	$2,5$
B	70	18	3
C	84	8	$1,5$

La empresa ha determinado que no destinará más de $5.000 en publicidad y estableció un máximo de 1,200 horas de venta. Además, la capacidad máxima de producción es de 600 unidades. El objetivo es determinar cuántas unidades del producto se debe vender por sector para maximizar la utilidad total de la empresa. Para lo anterior, establezca un problema de programación lineal identificando función objetivo, variables de decisión y restricciones, para luego resolverlo mediante un solver como el estudiado en ayudantía, entregando la utilidad que se obtendría.

Pregunta 7

Una fabrica de muebles, para producir un escritorio utiliza 4 unidades de madera y para fabricar un juego de sillas requiere de 3 unidades de madera. La venta de un escritorio otorga 40 US$ de utilidad y la de un juego de silla produce US$25. Las restricciones de mercado requieren que la cantidad de juegos de sillas fabricados sea de por lo menos el doble del número de escritorios producidos. Si se dispone de 20 unidades de madera, ¿cuántos escritorios y juegos de sillas debe producir la fábrica con tal de maximizar sus utilidades?

1. Para responder esta pregunta, formule un problema de programación lineal identificando: variables de decisión, restricciones y función objetivo, explicitando las unidades en que estos elementos quedan expresados.
2. Obtenga la solución óptima, indicando la utilidad que ésta generaría.