Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Matemática
Ingeniería Civil Matemática

Certamen 1 - Optimización no lineal (MAT275; MAT279)

Profesor: Pedro Gajardo
Ayudante: Diego Vicencio
Fecha: 10 de septiembre 2016

Pregunta 1

Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado de dimensión finita y $f : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función propia, semicontinua inferior y acotada inferiormente, es decir,

$$-\infty < \alpha := \inf_{x \in X} f(x).$$

Para $\varepsilon > 0$ considere $\bar{x}_\varepsilon \in X$ tal que $f(\bar{x}_\varepsilon) \leq \alpha + \varepsilon$. Pruebe que para todo $\lambda > 0$, existe $\bar{x} \in X$ tal que:

(a) $f(\bar{x}) \leq f(x) + \frac{\varepsilon}{\lambda}\|x - \bar{x}_\varepsilon\|$ para todo $x \in X$.

(b) $f(\bar{x}) \leq f(\bar{x}_\varepsilon)$.

(c) $\|\bar{x} - \bar{x}_\varepsilon\| \leq \lambda$.

Indicación: Analice la función $g(x) := f(x) + \frac{\varepsilon}{\lambda}\|x - \bar{x}_\varepsilon\|$.

Pregunta 2

Sean $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ dos espacios vectoriales normados. Sobre el espacio producto $X \times Y$, considere el operador de proyección $\Pi_X : X \times Y \longrightarrow X$ definido por $\Pi_X(x, y) = x$.

(a) Si $C \subset X \times Y$ es un conjunto convexo, pruebe que $\Pi_X(C) \subset X$ es también un conjunto convexo, donde

$$\Pi_X(C) = \{x \in X \mid (x, y) \in C \quad \text{para algún} \quad y \in Y\}.$$

(b) Sea $\phi : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función propia y $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) := \inf_{y \in Y} \phi(x, y). \tag{1}$$

Suponga que para todo $x \in X$ existe $y \in Y$ tal que $f(x) = \phi(x, y)$. Demuestre que

$$\operatorname{epi} f = \Pi_{X \times \mathbb{R}}(\operatorname{epi} \phi).$$

(c) Si la función $\phi : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ del punto anterior (mismas hipótesis) es convexa, pruebe que la función $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por (1) es convexa también.

Pregunta 3

Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Hilbert, con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, y $f : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función propia, convexa, semicontinua inferior y acotada inferiormente. Para $\lambda > 0$ se define la función

$$f_\lambda(x) := \inf_{z \in X} f(z) + \frac{1}{2\lambda}\|z - x\|^2 \qquad \forall\, x \in X. \tag{2}$$

(a) Demuestre que para todo $\lambda > 0$ y para todo $x \in X$, existe un único $\bar{z}_{\lambda,x} \in X$ tal que

$$f_\lambda(x) = f(\bar{z}_{\lambda,x}) + \frac{1}{2\lambda}\|\bar{z}_{\lambda,x} - x\|^2.$$

Pruebe además, que el elemento $\bar{z}_{\lambda,x} \in X$ satisface

$$f(\bar{z}_{\lambda,x}) + \left\langle \frac{x - \bar{z}_{\lambda,x}}{\lambda}, y - \bar{z}_{\lambda,x} \right\rangle \leq f(y) \qquad \forall\, y \in X.$$

(b) Demuestre que si $0 < \lambda_1 < \lambda_2$, entonces

$$\alpha := \inf_{z \in X} f(z) \leq f_{\lambda_2}(x) \leq f_{\lambda_1}(x) \leq f(x) \qquad \forall\, x \in X.$$

(c) Pruebe que para todo $\lambda > 0$ se tiene que f_λ es una función convexa, cuyo dominio es todo el espacio X.

(d) Para $x \in X$ pruebe que si $\bar{z}_{\lambda,x} \to x$, cuando $\lambda \to 0^+$, entonces $f_\lambda(x) \to f(x)$. Conjuntamente, demuestre que si $\bar{z}_{\lambda,x}$ no converge a x, cuando $\lambda \to 0^+$, entonces $f_\lambda(x) \to +\infty$.

(e) Concluya que

$$\lim_{\lambda \to 0^+} f_\lambda(x) = f(x) \qquad \forall\, x \in X.$$

Pregunta 4

Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Hilbert, con producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$, y $f : X \longrightarrow \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ una función propia, convexa, semicontinua inferior y acotada inferiormente, al igual que en el Problema 3. Para $\lambda > 0$ considere la función definida por (2). Para una sucesión $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de números positivos convergente a cero, se define la sucesión $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset X$ por:

$$x_0 \in X; \qquad f_{\lambda_k}(x_k) = f(x_{k+1}) + \frac{1}{2\lambda_k}\|x_{k+1} - x_k\|^2.$$

Es decir, de acuerdo a la notación utilizada en la parte (a) del Problema 3, se tiene que

$$x_{k+1} = \bar{z}_{\lambda_k, x_k}.$$

(a) Demuestre que la sucesión $\{f(x_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ es convergente.

(b) Pruebe que para todo $y \in X$ se tiene

$$2\lambda_k(f(x_{k+1}) - f(y)) \leq \|x_k - y\|^2 - \|x_{k+1} - y\|^2.$$

Indicación: Recuerde que en un espacio de Hilbert $(X, \|\cdot\|)$, con producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$, se tiene

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y\rangle \qquad \forall\ x,\ y \in X.$$

(c) Demuestre que para todo $y \in X$ se tiene

$$2\sum_{k=0}^{N} \lambda_k(f(x_{k+1}) - f(y)) \leq \|x_0 - y\|^2 \qquad \forall\ N \in \mathbb{N}.$$

(d) Si $\sum\limits_{k\geq 0} \lambda_k = +\infty$ pruebe que

$$\lim_{k\to+\infty} f(x_k) \leq f(y) \qquad \forall\ y \in X,$$

y concluya

$$\lim_{k\to+\infty} f(x_k) = \inf_{y\in X} f(y).$$

Tiempo: 3 horas.