Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Matemática
Ingeniería Civil Matemática

Certamen 1 (PAUTA)
Optimización no lineal (MAT275; MAT279)

Profesor: Pedro Gajardo
Ayudante: Diego Vicencio
Fecha: 10 de septiembre 2016

Pregunta 1

Para $\lambda > 0$, consideremos la función $g(x) := f(x) + \frac{\varepsilon}{\lambda}\|x - \bar{x}_\varepsilon\|$. Como f es acotada inferiormente, entonces g es coerciva. Además, g será semicontinua inferior. Por lo tanto, dado que X es de dimensión finita, existirá $\bar{x}$ minimizador de g, es decir,

$$g(\bar{x}) \leq g(x) \qquad \forall\, x \in X.$$

Como $g(x) \geq f(x)$ para todo $x \in X$, en particular para $x = \bar{x}$, se deduce

$$f(\bar{x}) \leq g(\bar{x}) \leq g(x) = f(x) + \frac{\varepsilon}{\lambda}\|x - \bar{x}_\varepsilon\| \qquad \forall\, x \in X, \tag{1}$$

lo que prueba la parte (a).

De (1) evaluando en $x = \bar{x}_\varepsilon$ se concluye la parte (b).

Finalmente, como

$$\alpha + \frac{\varepsilon}{\lambda}\|\bar{x} - \bar{x}_\varepsilon\| \leq f(\bar{x}) + \frac{\varepsilon}{\lambda}\|\bar{x} - \bar{x}_\varepsilon\| = g(\bar{x}) \leq g(\bar{x}_\varepsilon) = f(\bar{x}_\varepsilon) \leq \alpha + \varepsilon,$$

deducimos

$$\|\bar{x} - \bar{x}_\varepsilon\| \leq \lambda,$$

lo que prueba la parte (c).

Pregunta 2

Sean $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ dos espacios vectoriales normados. Sobre el espacio producto $X \times Y$, considere el operador de proyección $\Pi_X : X \times Y \longrightarrow X$ definido por $\Pi_X(x, y) = x$.

(a) Sean x_1 y x_2 en $\Pi_X(C)$ y $\lambda \in [0, 1]$. Se tendrá que existen y_1 e y_2 en Y tales que (x_1, y_1) y (x_2, y_2) pertenecen a C. Como C es un conjunto convexo, se tendrá

$$\lambda(x_1, y_1) + (1 - \lambda)(x_2, y_2) = (\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2) \in C.$$

Por lo tanto

$$\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in \Pi_X(C),$$

probando así la convexidad de $\Pi_X(C)$.

(b) Sea $(x, r) \in \operatorname{epi} f$. Sabemos que existe $y \in Y$ tal que $f(x) = \phi(x, y)$. Es decir, $\phi(x, y) \leq r$ que es equivalente a decir $(x, y, r) \in \operatorname{epi} \phi$. Concluimos

$$(x, r) = \Pi_{X \times \mathbb{R}}(x, y, r) \subset \Pi_{X \times \mathbb{R}}(\operatorname{epi} \phi)$$

y, por lo tanto, $\operatorname{epi} f \subset \Pi_{X \times \mathbb{R}}(\operatorname{epi} \phi)$.

Considere ahora $(x, r) \in \Pi_{X \times \mathbb{R}}(\operatorname{epi} \phi)$. Esto implica que existe $y \in Y$ tal que

$$(x, y, r) \in \operatorname{epi} \phi \ \Leftrightarrow \ \phi(x, y) \leq r.$$

Por la definición de la función f, se tendrá $f(x) \leq r$, es decir, $(x, r) \in \operatorname{epi} f$, probando así la igualdad

$$\operatorname{epi} f = \Pi_{X \times \mathbb{R}}(\operatorname{epi} \phi).$$

(c) Si ϕ es convexa, entonces $\operatorname{epi} \phi$ es un conjunto convexo de $X \times Y \times \mathbb{R}$. Por las partes (a) y (b) anteriores, se concluye que $\operatorname{epi} f$ es un conjunto convexo de $X \times \mathbb{R}$, que es equivalente a decir que la función f es convexa.

Pregunta 3

Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Hilbert, con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, y $f : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función propia, convexa, semicontinua inferior y acotada inferiormente. Para $\lambda > 0$ se define la función

$$f_\lambda(x) := \inf_{z \in X} f(z) + \frac{1}{2\lambda}\|z - x\|^2 \qquad \forall\, x \in X. \tag{2}$$

(a) Para $\lambda > 0$ y $x \in X$ consideremos la función

$$g_{\lambda,x}(z) := f(z) + \frac{1}{2\lambda}\|z - x\|^2 \qquad \forall\, z \in X.$$

Por ser f propia, semicontinua inferior, convexa y acotada inferiormente, concluimos que $g_{\lambda,x}$ es propia, semicontinua inferior, coerciva (dado f es acotada inferiormente) y estrictamente convexa (pues $\|\cdot - x\|^2$ es estrictamente convexa). Por lo tanto, al ser X un espacio reflexivo, existirá un único minimizador de $g_{\lambda,x}$ que denotaremos $\bar{z}_{\lambda,x} \in X$. Se tendrá así que

$$f_\lambda(x) := \inf_{z \in X} g_{\lambda,x}(z) = g_{\lambda,x}(\bar{z}_{\lambda,x}).$$

El elemento $\bar{z}_{\lambda,x}$ satisface

$$0 \in \partial g_{\lambda,x}(\bar{z}_{\lambda,x}) = \partial\left(f(\cdot) + \frac{1}{2\lambda}\|\cdot - x\|^2\right)(\bar{z}_{\lambda,x}).$$

Como f es propia y la función $\frac{1}{2\lambda}\|\cdot - x\|^2$ es diferenciable en todo punto, por el Teorema de Moreau-Rockafellar obtenemos

$$0 \in \partial f(\bar{z}_{\lambda,x}) + \partial\left(\frac{1}{2\lambda}\|\cdot - x\|^2\right)(\bar{z}_{\lambda,x}) = \partial f(\bar{z}_{\lambda,x}) + \frac{\bar{z}_{\lambda,x} - x}{\lambda},$$

concluyendo

$$\frac{x - \bar{z}_{\lambda,x}}{\lambda} \in \partial f(\bar{z}_{\lambda,x}),$$

que, por la definición de ∂f, es equivalente a

$$f(\bar{z}_{\lambda,x}) + \left\langle \frac{x-\bar{z}_{\lambda,x}}{\lambda}, y-\bar{z}_{\lambda,x} \right\rangle \leq f(y) \qquad \forall\, y \in X,$$

lo que demuestra la parte (a).

(b) Sea $0 < \lambda_1 < \lambda_2$. Para todo $x, z \in X$ se tendrá

$$\alpha := \inf_{v\in X} f(v) \leq f(z) \leq f(z) + \frac{1}{2\lambda_2}\|z-x\|^2 \leq f(z) + \frac{1}{2\lambda_1}\|z-x\|^2.$$

Tomado ínfimo sobre $z \in Z$ se deduce

$$\alpha \leq f_{\lambda_2}(x) \leq f_{\lambda_1}(x) \qquad \forall\, x \in X.$$

De la definición de $f_\lambda(x)$ se obtiene $f_\lambda(x) \leq f(x)$ para todo $x \in X$ y todo $\lambda > 0$, lo que termina de demostrar la parte (b).

(c) Para $\lambda > 0$ consideremos la función $\phi_\lambda : X \times X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ definida por

$$\phi_\lambda(x,z) := g_{\lambda,x}(z) = f(z) + \frac{1}{2\lambda}\|z-x\|^2.$$

La función ϕ_λ es convexa y propia, además, observe que

$$f_\lambda(x) = \inf_{z\in X} \phi_\lambda(x,z).$$

Por la parte (a) de esta pregunta, sabemos que para todo $x \in X$ existe $z \in X$ tal que $f_\lambda(x) = \phi_\lambda(x,z)$. Por lo tanto, gracias a lo visto en la parte (c) de la Pregunta 2, deducimos que f_λ es convexa.

Por otro lado, como f es propia, existirá $x_0 \in \operatorname{dom} f$. De esta forma

$$f_\lambda(x) = \inf_{z\in X} f(z) + \frac{1}{2\lambda}\|z-x\|^2 \leq f(x_0) + \frac{1}{2\lambda}\|x_0-x\|^2 < +\infty \qquad \forall\, x \in X,$$

lo que nos permite concluir $\operatorname{dom} f_\lambda = X$.

(d) Sea $x \in X$. Supongamos que $\bar{z}_{\lambda,x} \to x$, cuando $\lambda \to 0^+$. Como

$$f(\bar{z}_{\lambda,x}) \leq f_\lambda(x) = f(\bar{z}_{\lambda,x}) + \frac{1}{2\lambda}\|\bar{z}_{\lambda,x} - x\|^2 \leq f(x),$$

de la semicontinuidad inferior de f se tendrá

$$f(x) \leq \liminf_{\lambda\to 0^+} f(\bar{z}_{\lambda,x}) \leq \liminf_{\lambda\to 0^+} f_\lambda(x) \leq f(x).$$

Como $f_\lambda(x)$ es creciente cuando $\lambda \to 0^+$ (ver parte (b) de esta pregunta), concluimos

$$\lim_{\lambda\to 0^+} f_\lambda(x) = \liminf_{\lambda\to 0^+} f_\lambda(x) = f(x).$$

Supongamos ahora que $\bar{z}_{\lambda,x}$ no converge a x, cuando $\lambda \to 0^+$. Entonces, existirá $\varepsilon > 0$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$, existe $\lambda_k \in \;]0, 1/k]$ para el cual

$$\|\bar{z}_{\lambda_k,x} - x\| > \varepsilon.$$

Por la parte (b) de esta pregunta sabemos que

$$\lim_{\lambda\to 0^+} f_\lambda(x) = \lim_{k\to +\infty} f_{\lambda_k}(x).$$

Denotando

$$\alpha := \inf_{z\in X} f(z),$$

concluimos

$$\alpha + \frac{\varepsilon^2}{2\lambda_k} < \alpha + \frac{1}{2\lambda_k}\|\bar{z}_{\lambda_k,x} - x\|^2 \le f_{\lambda_k}(x).$$

Por lo tanto,

$$\lim_{\lambda\to 0^+} f_\lambda(x) = \lim_{k\to +\infty} f_{\lambda_k}(x) = +\infty.$$

(e) Sea $x \in X$. Si $x \notin \operatorname{dom} f$ se deduce el resultado gracias a la parte anterior, ya que si $\bar{z}_{\lambda,x}$ converge o no converge a x cuando $\lambda \to 0^+$, en ambos casos se tendrá $f_\lambda(x) \to f(x) = +\infty$.

Consideremos ahora $x \in \operatorname{dom} f$. Necesariamente $\bar{z}_{\lambda,x} \to x$, cuando $\lambda \to 0^+$. Pues sino, como $f_\lambda(x) \to +\infty$ (ver parte anterior) y $f_\lambda(x) \le f(x)$, deducimos que $x \notin \operatorname{dom} f$. Entonces, $\bar{z}_{\lambda,x} \to x$, cuando $\lambda \to 0^+$ y, nuevamente por a parte anterior, concluimos $f_\lambda(x) \to f(x)$.

De esta forma hemos deducido

$$\lim_{\lambda\to 0^+} f_\lambda(x) = f(x) \qquad \forall\, x \in X.$$

Pregunta 4

Sea $x \in X$ y $x_{k+1} = \bar{z}_{\lambda_k,x_k}$ de acuerdo a la notación utilizada en la parte (a) de la Pregunta 3.

(a) De la parte (b) de la Pregunta 3 se tiene que

$$f_{\lambda_k}(x_k) \le f(x_k).$$

Por lo tanto,

$$f(x_k) \ge f_{\lambda_k}(x_k) = f(x_{k+1}) + \frac{1}{2\lambda_k}\|x_{k+1} - x_k\|^2 \ge f(x_{k+1}),$$

lo que nos permite concluir que la sucesión $\{f(x_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente. Como f es acotada inferiormente deducimos que $\{f(x_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión convergente.

(b) Por la parte (a) de la Pregunta 3, se obtiene que $x_{k+1} = \bar{z}_{\lambda_k,x_k}$ satisface

$$f(x_{k+1}) + \left\langle \frac{x_k - x_{k+1}}{\lambda_k}, y - x_{k+1} \right\rangle \le f(y) \qquad \forall\, y \in X,$$

que es equivalente a

$$2\lambda_k(f(x_{k+1}) - f(y)) \le 2\langle x_{k+1} - x_k, y - x_{k+1}\rangle \qquad \forall\, y \in X.$$

Utilizando la indicación deducimos

$$2\lambda_k(f(x_{k+1}) - f(y)) \le \|y - x_k\|^2 - \|x_{k+1} - x_k\|^2 - \|y - x_{k+1}\|^2 \le \|x_k - y\|^2 - \|x_{k+1} - y\|^2 \qquad \forall\, y \in X.$$

(c) Sumando entre $k = 0$ y $k = N$ la desigualdad anterior, obtenemos

$$2\sum_{k=0}^{N} \lambda_k(f(x_{k+1}) - f(y)) \leq \|x_0 - y\|^2 - \|x_{N+1} - y\|^2 \leq \|x_0 - y\|^2 \qquad \forall\ y \in X.$$

(d) Si $\sum_{k\geq 0} \lambda_k = +\infty$, supongamos existe $y \in X$ tal que

$$\lim_{k\to+\infty} f(x_k) - f(y) =: \delta > 0.$$

Entonces

$$f(x_k) - f(y) \geq \delta \qquad \forall\ k \in \mathbb{N}.$$

Utilizando la parte anterior, deducimos

$$2\delta \sum_{k=0}^{N} \lambda_k \leq \|x_0 - y\|^2 \qquad \forall\ k \in \mathbb{N},$$

lo que implicará una contradicción cuando $N \to +\infty$. Por lo tanto

$$\lim_{k\to+\infty} f(x_k) \leq f(y) \qquad \forall\ y \in X.$$

Esto nos permitirá concluir

$$\lim_{k\to+\infty} f(x_k) \leq \inf_{y\in X} f(y).$$

Como

$$\inf_{y\in X} f(y) \leq f(x_k) \qquad \forall\ k \in \mathbb{N},$$

concluimos

$$\lim_{k\to+\infty} f(x_k) = \inf_{y\in X} f(y).$$

Tiempo: 3 horas.