Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Matemática
Ingeniería Civil Matemática

Certamen 2 - Optimización no lineal (MAT275; MAT279)

Profesor: Pedro Gajardo
Ayudante: Diego Vicencio
Fecha: 29 de octubre 2016

Pregunta 1

Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función convexa (por lo tanto continua) y coerciva, tal que

$$\partial f(x) \subseteq B(0,R) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n$$

para algún $R > 0$.

A partir de $x_0 \in \mathbb{R}^n$ considere la sucesión $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ definida por

$$x_{k+1} = x_k - t_k x_k^*, \tag{1}$$

donde $x_k^* \in \partial f(x_k)$ y $t_k > 0$.

Adicionalmente, considere la sucesión $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ definida por $v_0 = f(x_0)$ y

$$v_k = \min\{v_{k-1}, f(x_k)\} \qquad k \geq 1,$$

es decir,

$$v_k = \min\{f(x_0), \ldots, f(x_k)\}.$$

1. Justifique la existencia de un $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$f(\bar{x}) = \bar{v} := \inf_{x\in\mathbb{R}^n} f(x).$$

2. Para $\bar{x}$ y $\bar{v}$ definidos en el punto anterior, demuestre que

$$\|x_{k+1} - \bar{x}\|^2 \leq \|x_k - \bar{x}\|^2 - 2t_k(f(x_k) - \bar{v}) + t_k^2\|x_k^*\|^2.$$

3. Demuestre que

$$v_N - \bar{v} \leq \frac{\|x_0 - \bar{x}\|^2 + R^2 \sum\limits_{k=0}^{N} t_k^2}{2 \sum\limits_{k=0}^{N} t_k} \qquad \forall\, N \geq 1,$$

y concluya que si $\sum\limits_{k\geq 0} t_k = +\infty$ y $\sum\limits_{k\geq 0} t_k^2 < +\infty$, entonces $v_N \to \bar{v}$ cuando $N \to +\infty$.

Pregunta 2

Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable cuyo gradiente es Lipschitz de constante $L > 0$, es decir,

$$\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\| \leq L\|x - y\| \qquad \forall\ x,\ y \in \mathbb{R}^n.$$

Para $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $\nabla f(x) \neq 0$, considere la función $\phi : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\phi(t) := f(x + td)$$

donde $d = -\nabla f(x)$.

Suponga que existe al menos un $t > 0$ tal que $\phi'(t) = 0$ y sea $t^* > 0$ el valor más pequeño de ellos.

1. Justifique que ϕ es decreciente en $]0, t^*[$.
2. Demuestre que si $t \in\ ]0, 1/2L]$, entonces

$$\phi(t) \leq \phi(0) - \frac{t}{2}\|\nabla f(x)\|^2.$$

   Indicación: Pruebe la existencia de $t' \in\ ]0, t[$ tal que

$$\phi(t) = \phi(0) - t\|\nabla f(x)\|^2 + \langle \nabla f(x + t'd) - \nabla f(x), td \rangle.$$

3. Sea $t > 0$ tal que $\phi(t) \leq \phi(t^*)$. Demuestre que $t \geq t^* \geq 1/L$.

Pregunta 3

Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ al igual que en la Pregunta 2, es decir, una función continuamente diferenciable cuyo gradiente es Lipschitz de constante $L > 0$.

A partir de $x_0 \in \mathbb{R}^n$, se define la sucesión $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ dada por

$$x_{k+1} = x_k + t_k d_k, \tag{2}$$

donde $d_k = -\nabla f(x_k)$.

Supondremos que para todo $k \in \mathbb{N}$ se tiene $d_k \neq 0$ y que la derivada de $\phi(t) = f(x_k + td_k)$ se anula en al menos un punto, siendo $t_k^* > 0$ el más pequeño de ellos.

El paso $t_k > 0$ estipulado en (2) se elegirá de manera tal que $\phi(t_k) \leq \phi(t_k^*)$.

1. Pruebe que

$$f(x_{k+1}) \leq f\left(x_k + \frac{1}{2L}d_k\right) \leq f(x_k) - \frac{1}{4L}\|\nabla f(x_k)\|^2.$$

2. Demuestre que $f(x_k) \to -\infty$ ó $\nabla f(x_k) \to 0$ cuando $k \to +\infty$.

Tiempo: 3 horas.