Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Matemática
Ingeniería Civil Matemática

Certamen 2 (PAUTA)
Optimización no lineal (MAT275; MAT279)

Profesor: Pedro Gajardo
Ayudante: Diego Vicencio
Fecha: 29 de octubre 2016

Pregunta 1

1. La coercividad de $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ en dimensión finita es equivalente a la inf-compacidad, por lo tanto, dado f es continua, por el Teorema de Weierstrass se concluye la existencia de $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que
$$f(\bar{x}) = \bar{v} := \inf_{x\in\mathbb{R}^n} f(x).$$

2. Sea $\bar{x}$ y $\bar{v}$ definidos en el punto anterior. Entonces,
$$\|x_{k+1} - \bar{x}\|^2 = \|x_k - \bar{x} - t_k x_k^*\|^2 = \|x_k - \bar{x}\|^2 - 2t_k\langle x_k - \bar{x}, x_k^*\rangle + t_k^2\|x_k^*\|^2. \tag{1}$$
Como $x_k^* \in \partial f(x_k)$ se tiene
$$-\langle x_k - \bar{x}, x_k^*\rangle \leq -(f(x_k) - \bar{v}).$$
Remplazando esta desigualdad en (1) se concluye
$$\|x_{k+1} - \bar{x}\|^2 \leq \|x_k - \bar{x}\|^2 - 2t_k(f(x_k) - \bar{v}) + t_k^2\|x_k^*\|^2. \tag{2}$$

3. Utilizando la desigualdad (2), obtenemos
$$2t_k(f(x_k) - \bar{v}) \leq \|x_k - \bar{x}\|^2 - \|x_{k+1} - \bar{x}\|^2 + t_k^2\|x_k^*\|^2 \leq \|x_k - \bar{x}\|^2 - \|x_{k+1} - \bar{x}\|^2 + t_k^2 R^2, \tag{3}$$
donde la última desigualdad proviene de la hipótesis
$$\partial f(x) \subseteq B(0, R) \qquad \forall\ x \in \mathbb{R}^n.$$
En (3) sumando entre $k = 0$ y $k = N$, tendremos
$$2\sum_{k=0}^{n} t_k(f(x_k) - \bar{v}) \leq \|x_0 - \bar{x}\|^2 - \|x_{N+1} - \bar{x}\|^2 + R^2\sum_{k=0}^{n} t_k^2 \leq \|x_0 - \bar{x}\|^2 + R^2\sum_{k=0}^{n} t_k^2.$$
Dado que
$$v_k = \min\{v_{k-1}, f(x_k)\} \qquad k \geq 1,$$
se tendrá
$$(v_N - \bar{v})\sum_{k=0}^{n} t_k \leq 2\sum_{k=0}^{n} t_k(f(x_k) - \bar{v})$$

y, por lo tanto

$$v_N - \bar{v} \leq \frac{\|x_0 - \bar{x}\|^2 + R^2 \sum\limits_{k=0}^{n} t_k^2}{2 \sum\limits_{k=0}^{n} t_k} \qquad \forall\ N \geq 0.$$

Finalmente, si $\sum\limits_{k\geq 0} t_k = +\infty$ y $\sum\limits_{k\geq 0} t_k^2 < +\infty$, por la expresión anterior y teniendo en cuenta que $v_N \geq \bar{v}$, se deduce

$$0 \leq v_N - \bar{v} \leq \frac{\|x_0 - \bar{x}\|^2 + R^2 \sum\limits_{k=0}^{n} t_k^2}{2 \sum\limits_{k=0}^{n} t_k} \to 0.$$

Pregunta 2

1. Como $\phi'(0) = -\|\nabla f(x)\| < 0$ y $t^* > 0$ es el valor más pequeño tal que $\phi'(t^*) = 0$, se tiene que $\phi'(t) < 0$ para todo $t \in\ [0, t^*[$, por lo tanto ϕ es decreciente en $]0, t^*[$.

2. Sea $t \in]0, 1/2L]$. Por el Teorema del Valor Medio, existirá $t' \in]0, t[$ tal que

$$\begin{aligned}\phi(t) &= \phi(0) + t\langle \nabla f(x + t'd), d\rangle = \phi(0) + t\langle \nabla f(x), d\rangle + t\langle \nabla f(x + t'd) - \nabla f(x), d\rangle \\ &\leq \phi(0) - t\|\nabla f(x)\|^2 + Ltt'\|\nabla f(x)\|^2,\end{aligned}$$

   donde la última desigualdad proviene del hecho que $\nabla f(\cdot)$ es una función Lipschitz de constante $L > 0$ y $d = -\nabla f(x)$. Finalmente, como $t \in]0, 1/2L]$ y $t' \in]0, t[$, se tendrá que $Lt' \leq 1/2$, concluyendo

$$\phi(t) \leq \phi(0) - \frac{t}{2}\|\nabla f(x)\|^2.$$

3. Como $\phi(t) \leq \phi(t^*)$ y ϕ es decreciente en $]0, t^*[$, se deduce $t \geq t^*$. Por otro lado, como $\phi'(t^*) = 0$, se tiene

$$\begin{aligned}0 = \phi'(t^*) &= \langle \nabla f(x + t^*d), d\rangle = \langle \nabla f(x), d\rangle + \langle \nabla f(x + t^*d) - \nabla f(x), d\rangle \\ &\leq -\|\nabla f(x)\|^2 + t^* L\|\nabla f(x)\|^2,\end{aligned}$$

   de donde se concluye la desigualdad $t^* \geq 1/L$, pues $\nabla f(x) \neq 0$.

Pregunta 3

1. En esta parte podemos utilizar todos los resultados obtenidos en la Pregunta 2. Como $\phi(t_k) \leq \phi(t_k^*)$, por la parte 3 de la Pregunta 2, se tiene $t_k \geq t_k^* \geq 1/L \geq 1/2L$. Además, como ϕ es decreciente en el intervalo $]0 t_k^*[$ (parte 1 Pregunta 2), se deduce

$$f(x_{k+1}) = \phi(t_k) \leq \phi(t_k^*) \leq \phi(1/2L) = f\left(x_k + \frac{1}{2L}d_k\right) \leq f(x_k) - \frac{1}{4L}\|\nabla f(x_k)\|^2,$$

donde la última desigualdad se obtiene de la segunda parte de la Pregunta 2 ($\phi(0) = f(x_k)$ y $t = 1/2L$).

2. De la desigualdad obtenida en la parte anterior, tenemos

$$\|\nabla f(x_k)\|^2 \leq 4L(f(x_k) - f(x_{k+1})).$$

Sumando entre $k = 0$ y $k = N$, se obtiene

$$\sum_{k=0}^{N} \|\nabla f(x_k)\|^2 \leq 4L(f(x_0) - f(x_{N+1})). \tag{4}$$

Si f es acotada inferiormente, es decir,

$$-\infty < \bar{v} := \inf_{x \in \mathbb{R}^n} f(x),$$

se tendrá

$$\sum_{k=0}^{N} \|\nabla f(x_k)\|^2 \leq 4L(f(x_0) - \bar{v}) \qquad \forall N \geq 0,$$

por lo tanto $\nabla f(x_k) \to 0$. Por otro lado, si la sucesión $\{\nabla f(x_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ no converge a cero, entonces

$$\sum_{k=0}^{N} \|\nabla f(x_k)\|^2 \to +\infty.$$

De (4) se tendrá entonces

$$f(x_{N+1}) \leq f(x_0) - \frac{1}{4L}\sum_{k=0}^{N} \|\nabla f(x_k)\|^2 \qquad \forall N \geq 0$$

de donde se deducirá que $f(x_{N+1}) \to -\infty$ cuando $N \to +\infty$.

Tiempo: 3 horas.