Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Matemática
Ingeniería Civil Matemática

Certamen 3 - Optimización no lineal (MAT275; MAT279)

Profesor: Pedro Gajardo
Ayudante: Diego Vicencio
Fecha: 3 de diciembre 2016

Pregunta 1

Considere el siguiente problema de minimización

$$\begin{aligned} \bar{v} := \quad & \text{mín} \ \ -(z + x^2 y) \\ & (x,y,z) \in C \end{aligned} \tag{P_1}$$

donde

$$C := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z = 1; \quad e^{5x^2+4y^2} \leq 3; \quad -x \leq 0; \quad -y \leq 0; \quad -z \leq 0\}.$$

1. Justifique el Problema (P_1) tiene solución.

2. Sea $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ una solución del Problema (P_1). Justifique existen multiplicadores $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mu \geq 0$ y $(\mu_x, \mu_y, \mu_z) \in \mathbb{R}^3_+$ tales que

   $$\nabla_x L(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \lambda, \mu, \mu_x, \mu_y, \mu_z) = 0; \quad \mu(e^{5x^2+4y^2} - 3) = 0; \quad \mu_x x = 0; \quad \mu_y y = 0; \quad \mu_z z = 0$$

   donde

   $$L(x,y,z,\lambda,\mu,\mu_x,\mu_y,\mu_z) = -(z+x^2y) + \lambda(x+y+z-1) + \mu(e^{5x^2+4y^2} - 3) - (\mu_x x + \mu_y y + \mu_z z),$$

   es el Lagrangeano asociado al Problema (P_1).

3. Pruebe que el valor óptimo del Problema (P_1) es $\bar{v} = -1$. Para ello, si $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ es solución, puede analizar qué sucede cuando $\bar{z} > 0$ y, en el caso $\bar{z} = 0$, estudiar cotas para la función objetivo.

Pregunta 2

Para la función $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, considere el problema

$$\begin{aligned} \bar{v} := \quad & \min f(x) \\ & x \in C \end{aligned} \tag{P}$$

donde

$$C := \{x \in \mathbb{R}^n \mid h_j(x) = 0 \quad j = 1, \ldots, m; \quad g_i(x) \leq 0 \quad i = 1, \ldots, r\},$$

con $h_j, g_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$.

Asuma que (P) tiene solución y, por lo tanto, $\bar{v} \in \mathbb{R}$.

Dada la función $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$\phi(x) := \sum_{j=1}^{m} h_j^2(x) + \sum_{i=1}^{r} \max\{0, g_i(x)\},$$

para $c \geq 0$ se plantea el siguiente problema de optimización

$$\begin{aligned} \theta(c) := \quad & \min f(x) + c\ \phi(x) \\ & x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{P_c}$$

Supondremos que para todo $c \geq 0$, existe $x_c \in \mathbb{R}^n$ solución de (P_c), es decir,

$$\theta(c) = f(x_c) + c\ \phi(x_c).$$

1. Demuestre que
$$\bar{v} \geq \sup_{c \geq 0} \theta(c).$$

2. Si para algún $c \geq 0$ se tiene $\phi(x_c) = 0$, pruebe que x_c es solución de (P).

3. Demuestre que la función $c \to \phi(x_c)$ es decreciente y las funciones $c \to f(x_c)$ y $c \to \theta(c)$ son crecientes para $c \in [0, +\infty[$.

Pregunta 3

Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto cerrado y no vacío. Para $x \in C$, se define

$$D_C(x) := \{d \in \mathbb{R}^n \mid \exists\, t^* > 0 \quad \text{tal que} \quad x + td \in C \quad \forall\, t \in [0, t^*]\}.$$

Para las siguientes partes, considere el problema de minimización

$$\begin{aligned} &\min f(x) \\ &x \in C \end{aligned} \tag{P_3}$$

donde $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continuamente diferenciable.

1. Si $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ es un mínimo local de (P_3), pruebe que

   $$\langle \nabla f(\bar{x}), d \rangle \geq 0 \qquad \forall\, d \in D_C(\bar{x}).$$

   Indicación: Pruebe que $D_C(x) \subset T_C(x)$ donde $T_C(x)$ es el cono tangente a C en x introducido en clases.

2. Suponga que adicionalmente, $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función convexa y C es un conjunto convexo. Si para $\bar{x} \in C$ se tiene

   $$\langle \nabla f(\bar{x}), d \rangle \geq 0 \qquad \forall\, d \in D_C(\bar{x}),$$

   demuestre que $\bar{x}$ es solución de (P_3).

   Indicación: Por la convexidad de C, pruebe que si $x_1, x_2 \in C$, entonces $x_2 - x_1 \in D_C(x_1)$.

3. Considere que el conjunto C viene dado por

   $$C := \{x \in \mathbb{R}^n \mid h_j(x) = 0 \quad j = 1, \ldots, m; \quad g_i(x) \leq 0 \quad i = 1, \ldots, r\},$$

   donde $h_j : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ son funciones lineales afines y $g_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ son funciones continuamente diferenciables.

   Para $x \in C$ se define

   $$V(x) := \{d \in \mathbb{R}^n \mid \langle \nabla h_j(x), d \rangle = 0 \quad j = 1, \ldots, m; \quad \langle \nabla g_i(x), d \rangle < 0 \quad i \in I(x)\},$$

   donde $I(x)$ es el conjunto de índices donde las restricciones de desigualdad son activas en x.

   Pruebe que $V(x) \subset D_C(x)$ para todo $x \in C$.

4. Para el conjunto C de la parte anterior, si las funciones $g_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ son estrictamente convexas, pruebe que $V(x) = D_C(x)$.

Tiempo: 3 horas.